振動波動論 担当 吉岡大二郎　2006 年 2 月 13 日 10:50-12:20

教科書等持ち込み不可、答案用紙両面 1 枚

[1] 以下の事項について各 3 行以内で説明せよ.

(1) 基準振動

(2) $-\infty < x < \infty$で定義された関数$f(x)$のフーリエ積分表示

(3) 波の群速度と位相速度

(4) 一本の細いスリットによる波の回折

[2] 図 1 のように、質量 m の 3 つの質点がバネ定数 k、自然長 a の 2 つのバネで繋がれている. 全体は水平に置かれた細い円筒の中に入っていて、各質点は x 方向のみに運動を行なうことができる. 空気抵抗や, 円筒側面と質点の間の摩擦力などは無視できるものとする. 時刻 t での質点の x 座標を左側から$x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, 補助的な変数として$\xi_1(t) = x_1(t) + a$, $\xi_2(t) = x_2(t)$, $\xi_3(t) = x_3(t) - a$を導入する.

(1) $\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)$に対する運動方程式を記せ.

(2) 基準振動の角振動数を全て求めよ.

(3) $x_1(t)$,$x_2(t)$,$x_3(t)$の一般解（必要な数の任意定数を含む解）を求めよ.

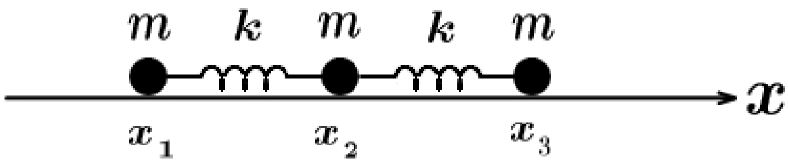


図 1: 2 つのバネで結ばれた 3 質点

[3] 講義で細い円筒中の空気を伝わる音波に対する波動方程式を導出した.（教科書 5.2）

(1) 講義での手順に従って, 波動方程式を導出せよ. なお, 円筒に沿って x 軸を設定し, 円筒に沿った空気の変位を$\xi(x,t)$, 圧力の平衡状態からの変化分を$p(x,t)$, 平衡状態での空気の密度をρ, 体積弾性率をKとして式を記せ.

(2) 円筒が無限に長い場合の一般解を, 圧力$p(x,t)$について進行波の形で記せ.

(3) 円筒の長さが有限である場合を考えよう. 長さをLとし, 境界条件を$\xi(0,t) = 0$, $p(L,t) = 0$とする. $0 \le x \le L$での$\xi(x,t)$と$p(x,t)$を表す一般解を求めよ.

(4) 前問(3)と同じ境界条件で考えよう．$t = 0$で図 2 に示すように$x = 0$付近に圧力が高い部分が生じた．また，この瞬間に空気は静止しているとしよう．このあと，$0 \leq x \leq L$での圧力がどのように時間変化するか想像し，様子がよくわかるように図示せよ．何時何が起こっているのかがわかるように書かれているとうれしい．（注意：これは(3)で求めた一般解を用いて議論することを要求している問題ではない．）

図 2： $t = 0$での圧力変化の様子

試験結果について(吉岡大二郎先生の感想)

問１振動波動の講義を受講したことで当然身についている概念の説明を求めた．多少なりとも勉強してあれば，簡単に解答できる説明問題であり，これと問２の運動方程式さえ書ければ，最低でも C が取れるという超サービス問題です．これができなければ，振動波動について何にも分かってないということなので，D は避けられない．

こんな簡単なものはやりたくないというのか，解答してない人もいましたが，点を取ってもらうために出した問題は素直に解答してほしいものです．

また，解答がこちらで求めているものとズレているものがかなり見受けられました．聞かれていることの本質を理解して，最も適切な解答を行うというのは知能が高い諸君にはできるはずです．これができない人は馬鹿と思われても仕方ない．政治家の場合には，ズレた答弁をしても，選挙で選ばれれば，首相職をキープできたりしますが，試験ではこのような間違えが多々あれば，不合格です．例えば，基準振動では，単に「振動は基準振動の重ね合わせで表せる」では，基準振動が何かは伝わりません．フーリエ積分の説明では，「$f(x) = \cdots$ と表せる」と，式を書いて，説明してくれれば済むのに，「有限区間のフーリエ級数というものがあって，これは周期関数になるけどそれを無限区間にすると...」などと書いてあったり，「sin と cos で表され，各項は積分できるから，元の関数も積分できることの証明に使える」，なんて，もともと $f(x)$ が積分できなければ，展開係数が求まらないので，本末転倒でしょう．逆に群速度と位相速度の説明では，式だけ書かれても，群速度と位相速度が何かは伝わりません．

問２は連成振動で一番やさしい問題の一つです．3 行 3 列の行列式の計算は高度な数式処理とは言えないと思うので，出題しました．行列式の計算ができなくても，内力のみの系なので重心の運動量が保存することに気がつけば，相対座標についての 2 体問題になりますから，2 元連立方程式が解ければ，答えはすぐに出せる問題です．

普通に 3 行 3 列の行列式を展開すると，すべての項に $(m\omega^2 - k)$ が掛かっているし，これ以外の項をまとめると，$m\omega^2$ の 0 次の項は消えてしまうので，因数分解は容易．ここで出る $\omega = 0$ という基準振動はもちろん重心の運動を与えるものです．従って，最終的な答えではすべての $x_i(t)$ に共通の $vt + x_0$ のような，2 つの任意定数 v, x_0 を含む項が加わるのですが，これを $A_1 \cos \alpha_1$ などと書いて，「2 つの任意定数 A_1 と α_1 が含まれている」，などと書いて澄ましている人が結構いたのは驚きました．また，行列式の計算を間違えて基準振動数が間違えている人も結構いましたが，この場合には固有ベクトルを求めようとすると 3 つの式が矛盾してしまうので，本当はすぐに間違えに気がつくはずです．こういう簡単にチェックできる間違えを見過ごすようでは，良い点を取ろうというやる気が感じられない．

問３は最後を除いて講義でやったとおりです．最後の問題の状況は，パイプの一端を手のひらでポンと叩いて蓋をしたときの状況です．叩いたときにできた端近くの圧力が高い部分が管を伝わって何往復もして，それがポンという音として聞こえてくる．そのとき，圧力に対しては，右端は固定端反射，左端は自由端反射なので，初めの右端の反射では圧力の低いパルスとして戻ってくる．このため，$t = 0$ の状態に戻るのは 2 往復後ということが正しく答えられれば良い．より厳密にいうと，圧力の高い部分は波動方程式に従って伝播します．つまり，音速で形を保ったまま進まなければなりません．しかし，初期条件では空気は動いてないので，この時この部分は左右に進むパルスが重なった状態になっているはずです．従って，次の瞬間には半分の高さのパルスが一方は音速で右に進み，他方は左に進むがすぐに自由端反射をして，結局長さが 2 倍，高さが半分のパルスとして右に進み，$t = L/v$ で右端での固定端反射をして，圧力が低いパルスとなり，左に進み，$t = 2L/v$ で左端で自由端反射で圧力が低いまま右に進み，ということを繰り返すというのが正解です．元の状態に戻るのは $t = 4L/v$ です．

05年度 振動・波動論解答

[1]

(1) 連成振動子全体が1つの振動数で振動するとき
その振動の様子を基準振動とよぶ。質点N個での
基準振動数は、 $\omega_j = 2\sqrt{\frac{K}{m}}\sin\left|\frac{k_j a}{2}\right|,\ k_j = \frac{j\pi}{a(N+1)}\ (1 \leq j \leq N)$

(2) 区間 $-l < x < l$ でのフーリエ級数表示を拡張したもので

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(k)e^{ikx}dk,\ g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx$$

として関数 f を積分表示するものである。

(3) 狭い範囲の波数の波からなる波束において、波の中心の速度
$v_g = \frac{d}{dk}\omega(k)$ を群速度、個々の波の速度 $v_p = \frac{\omega_n}{k_n} \simeq \frac{\omega_0}{k_0}$
を位相速度という。$v_g \neq v_p$ では、波の進行と共に波形が発展する。

(4) 波が隙間(スリット)を通過後、進行方向を広げる現象。
θ 方向の振幅は $A(\theta) = \frac{\sin\left(\frac{a}{2}k\sin\theta\right)}{k\sin\theta}$ なので、
回折は a (スリットの間隔) $< \lambda$ のときに起こると分かる。

(参考)

(1) 基準振動数よりも、
- 質点N個でN個の基準振動がある
- 重ね合わせることで、各点の振動を記述できる

ことの方が重要かもしれません。

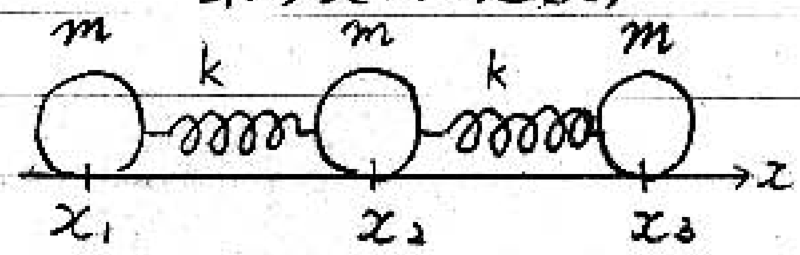
字汚くてごめんなさい…

[2] 以下、(t) 等省略することがあります

(1)

左から、物体 1, 2, 3 とする。

自然長 a (定数)



$\xi_1 = x_1 + a \quad \xi_2 = x_2 \quad \xi_3 = x_3 - a$

〈物体1〉

$$m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - a)$$

$$\therefore \quad m\ddot{\xi}_1 = k\xi_2 - k\xi_1$$

〈物体2〉

$$m\ddot{x}_2 = k(x_3 - x_2 - a) - k(x_2 - x_1 - a)$$

$$\therefore \quad m\ddot{\xi}_2 = k(\xi_3 - \xi_2) - k(\xi_2 - \xi_1)$$

$$m\ddot{\xi}_2 = k\xi_1 - 2k\xi_2 + k\xi_3$$

〈物体3〉

$$m\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2 - a)$$

$$\therefore \quad m\ddot{\xi}_3 = k\xi_2 - k\xi_3$$

(2) 基準振動として、$\xi_j = c_j e^{i\omega t}$ $(j = 1, 2, 3)$ とおくと、

$$Ⓐ \begin{cases} (k - m\omega^2)c_1 - kc_2 = 0 \\ -kc_1 + (2k - m\omega^2)c_2 - kc_3 = 0 \\ -kc_2 + (k - m\omega^2)c_3 = 0 \end{cases}$$

ここに、自明でない解が存在する必要十分条件は、

$$\begin{vmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\therefore \quad m\omega^2(m\omega^2 - k)(m\omega^2 - 3k) = 0$$

より、

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$ の2つ。

(3) $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ のとき、Ⓐより、$c_1 = -c_3$, $c_2 = 0$ $\therefore e_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ のとき、Ⓐより、$c_1 = c_3$, $c_2 = -2c_1$ $\therefore e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

よって、 ↑固有ベクトル

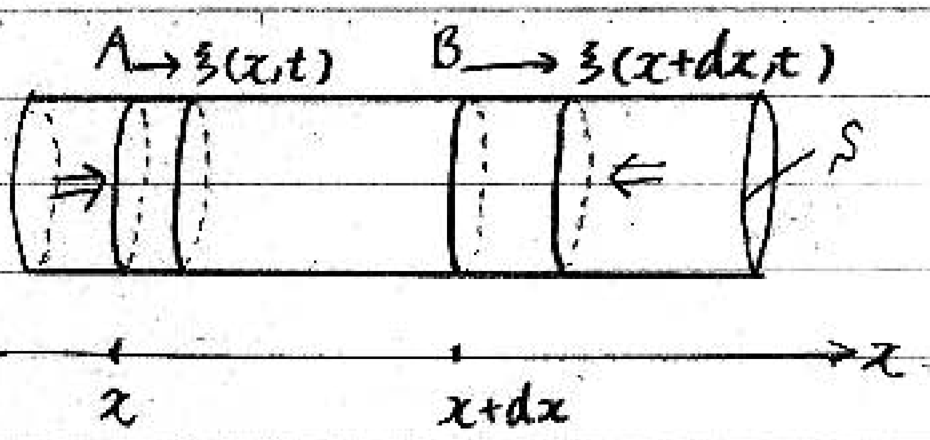
$$(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)) = \sum_{j=1,2} e_j A_j \cos(\omega_j t + \alpha_j)$$

(A_j, α_j：任意定数)

したがって、

$$\begin{cases} x_1(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}A_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \frac{1}{\sqrt{6}}A_2\cos(\omega_2 t + \alpha_2) - a \\ x_2(t) = -\frac{2}{\sqrt{6}}A_2\cos(\omega_2 t + \alpha_2) \\ x_3(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}A_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \frac{1}{\sqrt{6}}A_2\cos(\omega_2 t + \alpha_2) + a \end{cases}$$

[3]



(1) 円筒の中心軸をx軸とし、
変位$\xi(x,t)$を設定すると、
これはx軸に平行なベクトルである。

(i) AB間の体積変化

$V = S\,dx$ の変化は、

$$V + dV = S\{\xi(x+dx,t) + dx - \xi(x,t)\}$$
$$= S\left[dx + dx\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}\right] ✡$$

(ii) AB間の圧力変化

平衡時の圧力をP_0とし、変化後を$P = P_0 + p(x,t)$とすると
体積弾性率Kの定義より、

$$p = -K\frac{dV}{V} = -K\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}$$

(iii) AB間の空気に働く力

$$F = \underset{\Rightarrow}{\underline{S\,p(x,t)}} - \underset{\Leftarrow}{\underline{S\,p(x+dx,t)}}$$
$$= -S\frac{\partial}{\partial x}p(x,t)\,dx ✡$$
$$= SK\frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi(x,t)\,dx$$

(iv) ニュートン方程式

AB間の空気の質量は $V\rho = S\,dx\cdot\rho$ なので

$$V\rho\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = S\,dx\,K\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2}$$
$$\therefore\ \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho}\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2}$$

両辺に、$-K\frac{\partial}{\partial x}$を作用させ、(ii)を用いると、

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}$$

ただし、✡において、テイラー展開して、dxまで残す近似を行っている。