振動波動論 担当 吉岡大二郎 2005 年 2 月 10 日 10:50-12:20

教科書等持ち込み不可、答案用紙両面 1 枚

[1] 以下の事項について指示に従って各 5 行以内で説明せよ. 答案用紙の表側の上から10 行を用いよ.

(1) 重ねあわせの原理. 成り立つ理由と、この原理によって起こる現象の一例を説明せよ.

(2) 群速度と位相速度. どのようなもので、角振動数と波数によりどのように表されるか述べよ.

[2] 図 1 のように、質量 m の2つの質点がバネ定数k_1, k_2, k_3の3つのバネで繋がれていて、x 方向に微小振動を行なう. 左の質点の平衡点からの変位を$x_1(t)$, 右の質点の平衡点からの変位を$x_2(t)$とする. 答案用紙の裏側に解答を記せ.

(1) x_1とx_2に対する運動方程式を求めよ.

(2) 基準振動の角振動数ω_1とω_2を求めよ. 但し, $\omega_1 < \omega_2$とせよ.

以下の設問には$k_1 = 4k_0, k_2 = 2k_0, k_3 = k_0$として答えよ.

(3) $x_1(t)$, $x_2(t)$の一般解を求めよ.

(4) $t = 0$での初期条件を$x_1(0) = 0, \dot{x}_1(0) = u, x_2(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0$とするときの解を求めよ.

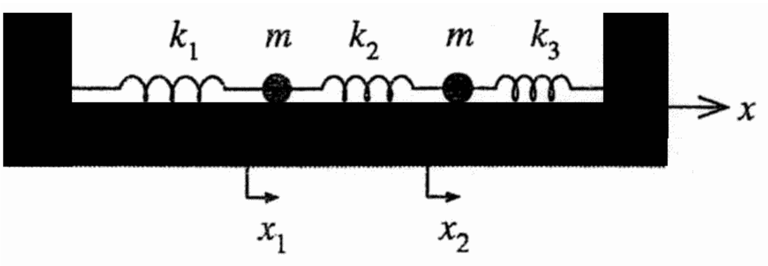


図 1:

[3] 津波は深い大洋をジェット旅客機並みの速さで進むという. この津波の速さを求めよう. 水深が浅い場合の水の表面の微小振動は波動方程式で記述できることが, これからの設問を解いていくことにより分かる. 水深が浅いというのは波の波長との比較で決まるので, 100km を越える震源域と同程度の波長の津波は海の深さ数 km と比較して圧倒的に長い. 一方, 波の振幅は 10m 程度だから, 津波は浅い海での海面の微小振動と見る事ができる.

図 2 のように水平方向に xy 軸, 鉛直方向に z 軸をとる. 波がないときの水面の位置を$z = 0$にとり, 水深を h とする. 水面は x 方向には遠方まで広がっているが, y 方向には$0 \le y \le W$の範囲に限られているものとする. 即ち, 幅 W, 深さ h の水路での波を考えよう. この水路で, 水は x 方向のみに変位すると近似する. 位置 x での変位を$\xi(x,t)$と書くことにする. ξは z に依らないとするのは水深が浅い場合に許される近似である. y にも依っていないので, x 方向に進む「平面波」を考えることになる. 答案用紙の**表側**に解答を記せ.

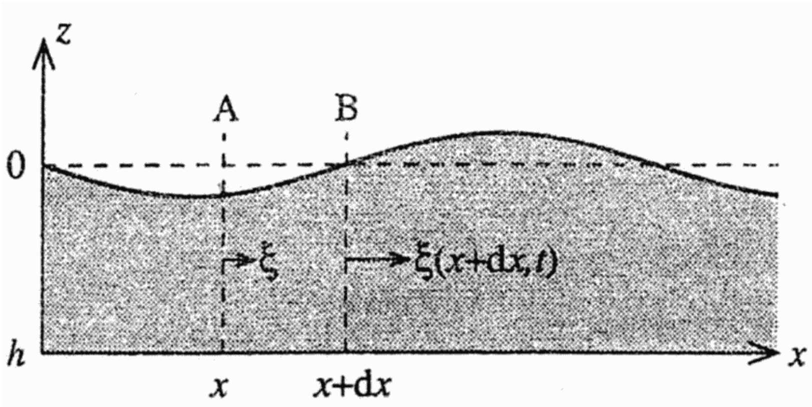


図2:

(1) この問題の最後に$\xi(x,t)$は弦の場合と同じ波動方程式に従うことが分かる. 波の速さをvとして最後に得られるであろう式とその一般解を記せ.

(2) 座標 x と $x+dx$ にそれぞれ仮想的な膜 A, B があるとしよう. この膜に挟まれた微小区間 dx には, 波がないときには, 体積 $V=Whdx$, 質量 $M=\rho Whdx$ の水がある. 変位$\xi(x,t)$により, この膜は移動するが, 間の水の質量は変化しない. 水の伸び縮みは無視できるので, 体積も変わらないと考えてよい. この場合水面が変化することになるが, 水面の高さは AB 間でほぼ一定の値$\eta(x,t)$であるとして, この量を変位ξの最低次で求めよ. (水面が変化するためには水は z 方向にも運動することになるが, この運動は浅い水路の場合無視できるので, この問題を解くに当たり考えなくて良い.)

(3) 水面の高さの違いは水中の圧力の変化をもたらす. 水面での大気圧をP_0として, 水面の高さが$\eta(x,t)$のときの水中での圧力$P_0+p(x,y,z,t)$を求めよ. 但し, 重力加速度をgと記せ.

(4) 膜ABの間にある水は両側から力を受ける.　この力をdx及び$\xi(x,t)$の1次までの近似で求めよ.

(5) 波動方程式を求め, 水の波の速さvをこれまでに出てきた記号を用いて表せ.

(6) 水深が 4000m の場合の水の波の速さvを計算せよ. (単位はm/sでも良いが, km/hに直してみよ. また, vがこの次元を持つことを確認せよ.)

2004年度 振動･波動論（吉岡大二郎） 解答例 作成: 磯口･井田･遠藤

[1]

(1) 重ね合わせの原理は、運動方程式が線形微分方程式になるため、成立する。

例としては、水面上の離れた二点で同じ周期の波を出し続けると定常波が出来る事。

（波の干渉も OK だと思われます）

(2) ある有限長の波が単色波の重ねあわせで作られている、と考えた時、その波の中心（振幅が最大値）の移動速度dw/dk(k は波数、w は角振動数)が群速度であり、一方で個々の単色波の進む速さw_0/k_0が位相速度である。

[2]

(1)

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) & \cdots(2.1) \\ m\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - k_3x_2 & \cdots(2.2) \end{cases}$$

(2) $x_j = C_je^{iwt}(j = 1, 2)$ とおくと、

(2.1)より、$-mw^2 + k_1C_1e^{iwt} - k_2(C_2 - C_1)e^{iwt} = 0$ …(2.3)

$$\therefore\ (-mw^2 + k_1 + k_2)C_1 - k_2C_2 = 0 \qquad \cdots(2.4)$$

同様に(2.2)から、 $-k_2C_1 + (-mw^2 + k_2 + k_3)C_2 = 0$ …(2.5)

$(C_1, C_2) \neq (0, 0)$なるC_1, C_2が存在するには、

$$\det\begin{pmatrix} -mw^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -mw^2 + k_2 + k_3 \end{pmatrix} = 0$$

ここで計算をがんばると

$m^2w^4 - (k_1 + 2k_2 + k_3)mw^2 + (k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1) = 0$ …(2.6)

判別式を D’としてがんばると、

$$D' = m^2\{(k_1 - k_3)^2 + 4{k_2}^2\} \equiv m^2D$$

よって(2.6)を解くと、

$$w^2 = \frac{(k_1 + 2k_2 + k_3) \pm \sqrt{D}}{2m}$$

$w_1 < w_2$より、

$$w_1 = \sqrt{\frac{(k_1 + 2k_2 + k_3) - \sqrt{D}}{2m}} \quad 、\quad w_2 = \sqrt{\frac{(k_1 + 2k_2 + k_3) + \sqrt{D}}{2m}}$$

(3)

問題文の条件$k_1 = 4k_0, k_2 = 2k_0, k_3 = k_0$を代入すると、

$$w^2 = \frac{9k_0 \pm 5k_0}{2m} \qquad \therefore\ w_1 = \sqrt{\frac{2k_0}{m}} \ 、\ w_2 = \sqrt{\frac{7k_0}{m}}$$

w_1, w_2を(2.4)に代入すると、

・$w = w_1$のとき、

$$(-m{w_1}^2 + k_1 + k_2)C_1 = k_2C_2 \qquad \therefore\ 2C_1 = C_2$$

・$w=w_2$のとき、

同様にして　　　　　　　　　　　　$\therefore\ C_1=-2C_2$

よって基準振動はそれぞれ

$(x_1(t),x_2(t))=(1,2)A\sin(w_1t+\alpha)$

$(x_1(t),x_2(t))=(2,-1)B\sin(w_2t+\beta)$

ゆえに、求める一般解は

$\underline{x_1(t)=A\sin(w_1t+\alpha)+2B\sin(w_2t+\beta)}$

$\underline{x_2(t)=2A\sin(w_1t+\alpha)-B\sin(w_2t+\beta)}$

(4)　まず、

$$\dot{x}_1(t)=\sqrt{\tfrac{2k_0}{m}}A\cos(w_1t+\alpha)+2\sqrt{\tfrac{7k_0}{m}}B\cos(w_2t+\beta)$$

$$\dot{x}_2(t)=2\sqrt{\tfrac{2k_0}{m}}A\cos(w_1t+\alpha)-\sqrt{\tfrac{7k_0}{m}}B\cos(w_2t+\beta)$$

よって

$\begin{cases}x_1(0)=0\\x_2(0)=0\\\dot{x}_1(0)=u\\\dot{x}_2(0)=0\end{cases}$ の条件の下でそれぞれ代入すると、

$A\sin\alpha+2B\sin\beta=0$　…(2.7)

$2A\sin\alpha-B\sin\beta=0$　…(2.8)

$\sqrt{2}A\cos\alpha+2\sqrt{7}B\cos\beta=u\cdot\sqrt{\tfrac{m}{k_0}}$　…(2.9)

$2\sqrt{2}A\cos\alpha-\sqrt{7}B\cos\beta=0$　…(2.10)

(2.7)(2.8)より、

$A\sin\alpha=B\sin\beta=0$

ここで A=0 または B=0 とすると、明らかに(2.9)(2.10)を満たさない。

$\therefore\ \sin\alpha=\sin\beta=0$

よって$\cos\alpha=\cos\beta=1$とおける。(たとえば$\cos\alpha=-1$とおいても、A の符号が逆になるだけなので、このようにおいてよい。)

(2.9)(2.10)より、

$\begin{cases}\sqrt{2}A+2\sqrt{7}B=u\sqrt{\tfrac{m}{k_0}}\\2\sqrt{2}A-\sqrt{7}B=0\end{cases}$　　$\therefore\ A=\dfrac{u}{5\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\dfrac{m}{k_0}}$, $B=\dfrac{2u}{5\sqrt{7}}\cdot\sqrt{\dfrac{m}{k_0}}$

これを代入して

$\underline{x_1(t)=\dfrac{u}{5}\sqrt{\dfrac{m}{k_0}}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{\dfrac{2k_0}{m}}t+\dfrac{4}{\sqrt{7}}\sin\sqrt{\dfrac{7k_0}{m}}t\right\}}$　$\underline{x_2(t)=\dfrac{u}{5}\sqrt{\dfrac{m}{k_0}}\left\{\sqrt{2}\sin\sqrt{\dfrac{2k_0}{m}}t-\dfrac{2}{\sqrt{7}}\sin\sqrt{\dfrac{7k_0}{m}}t\right\}}$

[3]

(1) 式: $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi(x,t) = v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi(x,t)$ ⋯(3.1)

これより、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x}\right)\xi(x,t) = 0$$

この式を満たすには、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)\xi(x,t) = 0 \qquad \cdots(3.2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x}\right)\xi(x,t) = 0 \qquad \cdots(3.3)$$

の 2 式のいずれかを満たせばよい。

ここで任意の微分可能な関数 f,g を用いると、(3.2)の解は、 $\xi(x,t) = f(x - vt)$

(3.3)の解は、 $\xi(x,t) = g(x + vt)$

と表せる。この 2 解の和も波動方程式を満たすので、求める一般解は、

$\therefore$ $\xi(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$ （f,g は任意の微分可能な関数）

(2) 波があるとき、膜の間の区間は、幅 W、高さ$(h + \eta(x,t))$、

膜間の距離$\{(x + dx + \xi(x + dx, t) - (x + \xi(x,t))\}$であり、この体積が波のないときの体積 $Whdx$ に等しいので、

$$W(h + \eta(x.t))\Big\{\big(x + dx + \xi(x + dx, t)\big) - \big(x + \xi(x,t)\big)\Big\} = Whdx$$

$$(h + \eta(x,t))\Big(dx + \xi(x + dx, t) - \xi(x,t)\Big) = hdx$$

$$1 + \frac{\xi(x + dx, t) - \xi(x,t)}{dx} = \frac{h}{h + \eta(x,t)} \qquad \cdots(3.4)$$

ここで$\eta(x,t)$は波の振幅であり、微小振動であるから、$|\eta(x,t)| \ll h$。

よって $\left|\frac{\eta(x,t)}{h}\right| \ll 1$ であり、

$\frac{h}{h + \eta(x,t)} = \left(1 + \frac{\eta(x,t)}{h}\right)^{-1} = 1 - \frac{\eta(x,t)}{h}$ とすることができる。

また、Taylor 展開を使うことで

$\xi(x + dx, t) - \xi(x,t) = \frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x}dx + \cdots$ となる。

ゆえに、(3.4)式について、ξの最低次の項だけを残すと、

$$1 + \frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x} = 1 - \frac{\eta(x,t)}{h}$$

$$\therefore \qquad \eta(x,t) = -h\frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x}$$

(3)　水面が多少高くなるが、大気圧P_0は一定としてよい。$P(x,t,z,t)$は水の重さだけによる圧力変化である。高さzの地点では、$(\eta(x,t)-z)$分、水圧がかかるので

$$\therefore \quad P_0+P(x,y,z,t)=P_0+\rho\big(\eta(x,t)-z\big)g$$

(4)**　高さzの地点での膜Aに左からかかる圧力は　$P_0+\rho(\eta(x,t)-z)g$

膜Bに右からかかる圧力は、　$P_0+\rho\Big(\eta(x+dx,t)-z\Big)g$

よって受ける力の和は

$$W\int_{-h}^{\eta(x,t)}\{P_0+\rho(\eta(x,t)-z)g\}dz-W\int_{-h}^{\eta(x+dx,t)}\{P_0+\rho(\eta(x+dx,t)-z)g\}dz$$

$$=W\left\{P_0\Big[dz\Big]_{-h}^{\eta(x,t)}-\frac{1}{2}\rho g\Big[(\eta(x,t)-z)^2\Big]_{-h}^{\eta(x,t)}\right\}-W\left\{P_0\Big[dz\Big]_{-h}^{\eta(x+dx,t)}-\frac{1}{2}\rho g\Big[(\eta(x+dx,t)-z)^2\Big]_{-h}^{\eta(x,t)}\right\}$$

$$=-WP_0\Big(\eta(x+dx,t)-\eta(x,t)\Big)-\frac{1}{2}W\rho g\left\{\Big(\eta(x+dx,t)+h\Big)^2-\Big(\eta(x,t)+h\Big)^2\right\} \qquad \cdots(3.5)$$

ここで(2)の結果より、ηの 2 乗はξの 2 乗の項となるので無視すると、

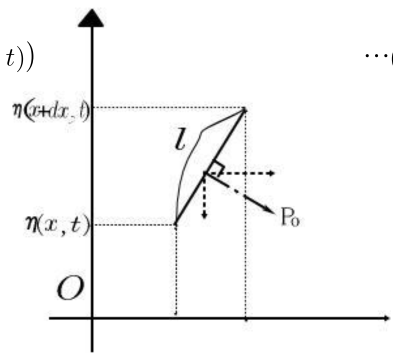
(3.5)$\cdots$　$-WP_0\big(\eta(x+dx,t)-\eta(x,t)\big)-Wh\rho g\big(\eta(x+dx,t)-\eta(x,t)\big)$　$\cdots$(3.6)

また水面が傾いているため、大気圧には水平成分が存在し、図の長さをlとすると、その水平成分は

$$P_0\cdot\frac{\eta(x+dx,t)-\eta(x,t)}{l}$$

よって、かかる力の水平成分は、

$$P_0\cdot\frac{\eta(x+dx,t)-\eta(x,t)}{l}\times Wl \;=WP_0\big(\eta(x+dx,t)-\eta(x,t)\big) \qquad \cdots(3.7)$$



求める力Fは(3.6)と(3.7)の和なので

$$F=-Wh\rho g\big(\eta(x+dx,t)-\eta(x,t)\big)$$

$$=-Wh\rho g\cdot\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial x}dx$$

$$=Wh^2\rho g\cdot\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial x^2}dx$$

(5)　運動方程式より

$$\rho Whdx\cdot\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial t^2}=Wh^2\rho g\cdot\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial x^2}dx$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial t^2}=gh\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial x^2}$$

これは波動方程式である。(1)との対応により、

$$v^2=gh \qquad \therefore \qquad v=\sqrt{gh}$$

(6)　$g=9.8m/s^2$を利用して計算をがんばると、$v=140\sqrt{2}\ m/s=504\sqrt{2}\ km/h\simeq 7.1\times10^2\,km/h$

試験範囲について

教科書全部です。ただし、授業でさらりと飛ばしたところなどは範囲外だと思います。

詳しくは1回目の授業で配られたプリントに書いてありますが、

1．2　3．4　3．8　4．3．1　5．4．5～5．8の終わりまで　6．3．3などが飛ばされました。

けれども、一応「興味ある人は読んでおいてください」って先生が言っていました。(by　磯口)