振動波動・重要な点

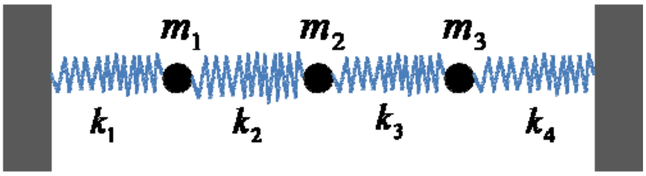
問題・質問があればチャムまで

もう一度いいますが、これは教科書の完璧なまとめではなく、ただ説明が面倒臭い点を飛ばして重要な点を抽出して示すだけですから教科書を一度（以上）勉強して下さい。

特に単位を落としたくない人は少なくとも必ず 2.1.1、2.3.1、5.2.1 をきちんと勉強して全部の式の立て方、式変形を自分でできるようにして下さい。必ずです。

本ファイルの内容：連成振動の運動の求め方、波動方程式の形と立て方、言葉の説明

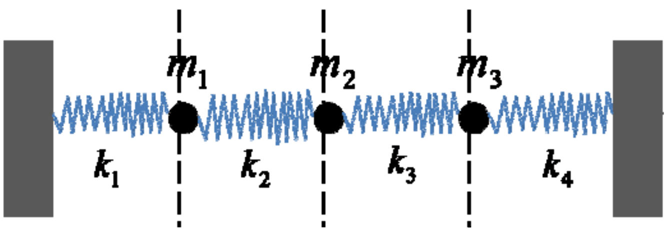
2 章　連成振動



ここから 4 ページは教科書の 2.3.1 を詳しく説明するものにすぎないので、もう理解できた人は飛ばしても構いません。

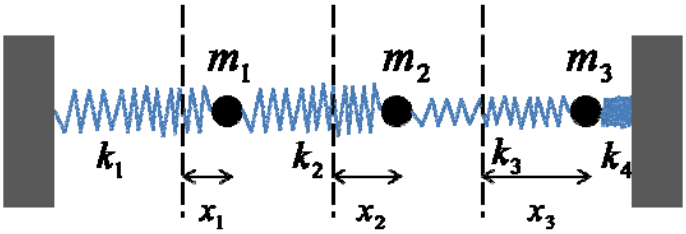
上の図の問題を見ながら解いていきましょう。どのばねも静止状態では自然長になっている（伸び縮みしない）とする。

① 平衡位置を決定して平衡状態（静止状態）の図を描くこと。
この講義でやっているものは直ちに平衡状態の図を描けます。



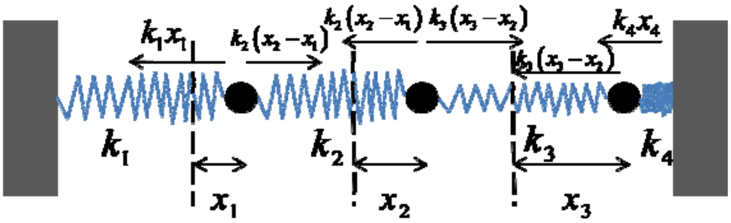
破線は平衡点です。

② 物体を平衡点からずらして、壁を基準にした座標よりも、**すべての座標を平衡点からの距離で表す**$_{\text{注}1}$こと。（当たり前のように思えるかもしれませんが、鉛直方向のばねの単振動のようにばねの自然長（平衡位置ではない）からの距離を用いると困る）



③　力を図に記すこと。伸びたばねは引く、縮んだばねは押す、とはいうまでもないけど、問題はk_2のばねは伸びているか縮んでいるかはx_2とx_1とどっちが大きいかによって異なります。では力の方向はどう決めるでしょう？

それについては、$x_1 < x_2 < x_3$ つまり、**右の物体の方が遠く移動するように図を描いた**注2ほうが混乱が起こりません。このようにしたら、一番右のばね以外は伸びの状態にあり、引く力になります。（一般性を失わないかと心配する人は場合を分けて考えたら分かると思います。まだ複雑な運動方程式に慣れていない人（みんなですね。もう慣れた人はこのシケプリを見ないわけですね。）は一般化の図よりも右の方が遠く移動するように描くことを勧めます。）



④　運動方程式を書くこと。もう図が描いてあるので、この段階は簡単でしょう。ただ、力の向きに注意しましょう。

$$
\begin{aligned}
F_1 &= m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2\left(x_2 - x_1\right) \\
F_2 &= m_2\ddot{x}_2 = -k_2\left(x_2 - x_1\right) + k_3\left(x_3 - x_2\right) \\
F_3 &= m_3\ddot{x}_3 = -k_3\left(x_3 - x_2\right) - k_4x_3
\end{aligned}
$$

チェックポイント注3　計算ミスをして運動方程式が間違ったらこれからは大変なので、チェックポイントを覚えましょう。**左辺に$\ddot{x}_1$のある式の右辺のx_1の項は必ずマイナスの符号になっていることです。**$\ddot{x}_2$と$\ddot{x}_3$も確認すればこのチェックポイントが成立することが分かる。この注意点はあらゆる連成振動が成り立ちます。

⑤　基準振動を考えること。即ち、もし系全体が同じ振動数ωで振動する場合はどのような振動数があり得るかを調べます。そこで、

$$
x_1 = c_1e^{i\omega t}\ ,\ x_2 = c_2e^{i\omega t}\ ,\ x_3 = c_3e^{i\omega t}
$$

という基準振動の解を仮定して、ω を求めます。まず $\ddot{x}_1$ を計算する。2 回微分したら

$\ddot{x}_1 = -c_1\omega^2 e^{i\omega t}$, $\ddot{x}_2 = -c_2\omega^2 e^{i\omega t}$, $\ddot{x}_3 = -c_3\omega^2 e^{i\omega t}$ になり、運動方程式に代入し $e^{i\omega t}$ を両辺から消せば

$$
\begin{aligned}
-m_1\omega^2 c_1 &= -k_1c_1 + k_2\left(c_2 - c_1\right) \\
-m_2\omega^2 c_2 &= -k_2\left(c_2 - c_1\right) + k_3\left(c_3 - c_2\right) \\
-m_3\omega^2 c_3 &= -k_3\left(c_3 - c_2\right) - k_4c_3
\end{aligned}
$$

となり、行列で書くと、

$$
\begin{pmatrix}
-\left(k_1 + k_2\right)/m_1 & k_2/m_1 & 0 \\
k_2/m_2 & -\left(k_2 + k_3\right)/m_2 & k_3/m_2 \\
0 & k_3/m_3 & -\left(k_3 + k_4\right)/m_3
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}
= -\omega^2 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}
$$

右の 3×3 行列を P とすると、

$$
P\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}
$$

になります。数学 II を勉強する人が分かるように、$-\omega^2$ は P の固有値、$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ は固有ベクトルです。ですから、$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ は固有ベクトルと呼ばれるわけです。$-\omega^2$ を解くために数学 II の方法と全く同じ式で

$$
\det\left(-\omega^2 E_3 - P\right) = 0
$$

を解けばよいことになります。この式の具体的な計算は教科書の 2.37 式を参照。固有ベクトルの解き方も計算した何個かの $-\omega^2$ をそれぞれ $P\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ に代入して計算できます。固有ベクトルは普段、長さ 1 のベクトルを選ぶようにする[注4]。分からなかったら数

学Ⅱのノートや演習を参照。

$$\det\left(-\omega^2 E_3 - P\right) = \begin{vmatrix} (k_1+k_2)/m_1 - \omega^2 & -k_2/m_1 & 0 \\ -k_2/m_2 & (k_2+k_3)/m_2 - \omega^2 & -k_3/m_2 \\ 0 & -k_3/m_3 & (k_3+k_4)/m_3 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

の方程式はω^2の３次方程式なので、ω^2は３個ある。それぞれの固有ベクトルを求めて、$\boldsymbol{a}$が固有ベクトルならばA$\boldsymbol{a}$も固有ベクトル（A は 0 でない数値）ということをを使って

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \mathrm{A} e^{i\omega t}$$

になる。一般解はこれらの基準振動の線形結合を表されます。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1振動1} \\ c_{2振動1} \\ c_{3振動1} \end{pmatrix} \mathrm{A}_1 e^{i\omega_1 t} + \begin{pmatrix} c_{1振動2} \\ c_{2振動2} \\ c_{3振動2} \end{pmatrix} \mathrm{A}_2 e^{i\omega_2 t} + \begin{pmatrix} c_{1振動3} \\ c_{2振動3} \\ c_{3振動3} \end{pmatrix} \mathrm{A}_3 e^{i\omega_3 t}$$

実数部分をとると

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1振動1} \\ c_{2振動1} \\ c_{3振動1} \end{pmatrix} \mathrm{A}_1' \cos\left(\omega_1 t + \alpha_1\right) + \begin{pmatrix} c_{1振動2} \\ c_{2振動2} \\ c_{3振動2} \end{pmatrix} \mathrm{A}_2' \cos\left(\omega_2 t + \alpha_2\right) + \begin{pmatrix} c_{1振動3} \\ c_{2振動3} \\ c_{3振動3} \end{pmatrix} \mathrm{A}_3' \cos\left(\omega_3 t + \alpha_3\right)$$

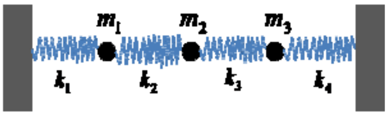
これは教科書の 2.52 式です。

ここまで理解すれば、この説明は終わりなんですが、試験対策のためにいろいろな応用問題を考えてみんなに紹介しようと思います。

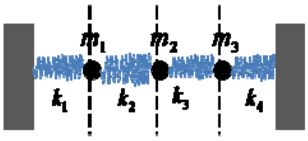
では、連成振動の応用問題は？

1 点目　平衡状態でばねに伸び・縮みがあるのでは？

例として、上の問題の系



の壁を近づければ



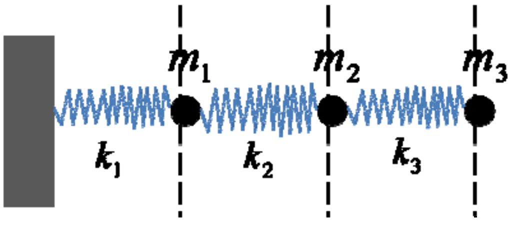
平衡状態でもばねは力を働いています。でも幸いに、注 1 のように座標を平衡位置からの距離を選べば、運動方程式は

$$F_1 = m_1\ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2\left(x_2 - x_1\right)$$
$$F_2 = m_2\ddot{x}_2 = -k_2\left(x_2 - x_1\right) + k_3\left(x_3 - x_2\right)$$
$$F_3 = m_3\ddot{x}_3 = -k_3\left(x_3 - x_2\right) - k_4 x_3$$

のように、変わらないのです。(なぜなら、平衡状態では m_1 が釣合うために k_1 と k_2 の力が等しくなければならなくて、ばねの基本的な性質より k_2 が m_1 に掛ける力と m_2 に掛ける力が等しくて、同様に考えたら全部等しいので、合力に影響があるのはこの平衡状態からずれた効果だけだからです。)

結論として、元々ばねは自然長になっている状態であるかでないか気にしなくても良くて、伸びのない状態の運動方程式を立てるだけで済むのです。

2 点目　壁が片方無いのでは？



教えたばかりの方法で自分で運動方程式を立ててみましょう。(ましょうっていうか自分

で立てて下さい。）結果として、

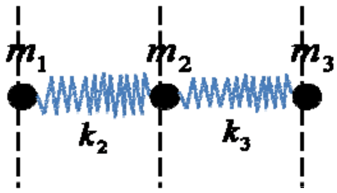
$$F_1 = m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2\left(x_2 - x_1\right)$$
$$F_2 = m_2\ddot{x}_2 = -k_2\left(x_2 - x_1\right) + k_3\left(x_3 - x_2\right)$$
$$F_3 = m_3\ddot{x}_3 = -k_3\left(x_3 - x_2\right)$$

です。解き方も同様です。

$$\begin{pmatrix} -\left(k_1+k_2\right)/m_1 & k_2/m_1 & 0 \\ k_2/m_2 & -\left(k_2+k_3\right)/m_2 & k_3/m_2 \\ 0 & k_3/m_3 & -k_3/m_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = -\omega^2\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

という貴人振動の方程式の固有値、固有ベクトルを求めることです。

３点目　壁が両方無いのでは？　面白いことに、物理学的な新しい概念を必要とすることを授業でやらなかったのに過去問に有ったとはですね….。



この場合はちょっと困ることがあります。見ていきましょう。運動方程式は自分で立てて練習しましょう。結果は

$$F_1 = m_1\ddot{x}_1 = k_2\left(x_2 - x_1\right)$$
$$F_2 = m_2\ddot{x}_2 = -k_2\left(x_2 - x_1\right) + k_3\left(x_3 - x_2\right)$$
$$F_3 = m_3\ddot{x}_3 = -k_3\left(x_3 - x_2\right)$$

で、基準振動を考えたら、

$$\begin{pmatrix} -k_2/m_1 & k_2/m_1 & 0 \\ k_2/m_2 & -\left(k_2+k_3\right)/m_2 & k_3/m_2 \\ 0 & k_3/m_3 & -k_3/m_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = -\omega^2\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

になります。$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$を代入すると、

$$\begin{pmatrix} -k_2/m_1 & k_2/m_1 & 0 \\ k_2/m_2 & -(k_2+k_3)/m_2 & k_3/m_2 \\ 0 & k_3/m_3 & -k_3/m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

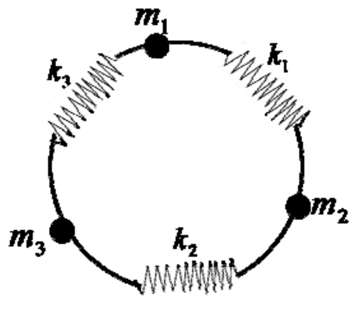
ですから、0 という解が出てきます。0 というのは無意味で捨てられる解ではないことに注意しましょう。むしろ、**振動数 0 というのは振動しない、つまり、等速直線運動です**注５。
一般解を書けば

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1振動1} \\ c_{2振動1} \\ c_{3振動1} \end{pmatrix} \mathrm{A}_1' \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \begin{pmatrix} c_{1振動2} \\ c_{2振動2} \\ c_{3振動2} \end{pmatrix} \mathrm{A}_2' \cos(\omega_2 t + \alpha_2) + (x_0 + vt) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

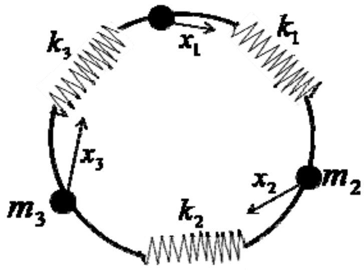
となります。常識的に考えると、壁のある場合と壁が片方だけある場合は平衡点の周りを振動するのに対して、壁が両方無い場合は外力が存在しないので運動量が保存されて、振動しながら系全体で等速直線運動を行います。

連成振動の問題のほとんどでは、振動数 0 が出てき（てしまっ）た場合は、系全体の等速運動を行っていることを意味しています。

5 点目　円になっているのでは？



これはびっくりしないで下さい。難しいものではないです。注 1、注 2、注 3 に注意を払いながら前に言った順番で問題を解いたら問題ないはずです。
3 個の物体が円状のレールに運動を制限された系です。この円状のレールの上を３つのばねに運動を支配された上で自由に運動するとします。



運動方程式は自分で立てられるのでしょうか？

$$F_1 = m_1\ddot{x}_1 = k_3\left(x_3 - x_1\right) + k_1\left(x_2 - x_1\right)$$
$$F_2 = m_2\ddot{x}_2 = -k_1\left(x_2 - x_1\right) + k_2\left(x_3 - x_2\right)$$
$$F_3 = m_3\ddot{x}_3 = -k_2\left(x_3 - x_2\right) - k_3\left(x_3 - x_1\right)$$

基準振動を考えると

$$\det\left(-\omega^2 E_3 - P\right) = \begin{vmatrix} \left(k_1 + k_3\right)/m_1 - \omega^2 & -k_1/m_1 & -k_3/m_3 \\ -k_1/m_2 & \left(k_1 + k_2\right)/m_2 - \omega^2 & -k_2/m_2 \\ -k_3/m_3 & -k_2/m_3 & \left(k_2 + k_3\right)/m_3 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

の解は系の基準振動の角振動数です。よく見てみると $\omega^2 = 0$ も（また）この方程式の解になっています。この基準振動は前と同様に意味を持つ解であり、**系全体でレール上で等速円運動を行っている**ことを意味しています。ですから、一般解は 2 個の振動数の基準振動と等速円運動の和で表されます。

6 点目　直線に物体が左右の振動ではなく、上下の振動を行うのでは？

この運動方程式の立て方は教科書の 3.1.2 を参考にして下さい。

この場合は、上の 5 点までと違って、平衡状態でのばねの伸び縮みは役割を果たすようになります。なぜなら、左右の運動で蓄えられていた力は常に消し合っているのに対して、上下の運動では上に移動しては両方のばねが下に引き戻す、下に移動しては両方のばねが上に引き戻す、ように力は消しあわない、もっと正確に言うと支えあうのです。ゴムひものように、平衡状態でのばねの張力が強いほど振動数が高い、張力が 0（自然長になっている）の場合は振動しない、ということを常識的に理解することができるでしょう。

あと、解き方は上でやってきたと同様、基準振動を考えて（単振動と見なして）角振動数を求め、一般解をそれぞれの基準振動の線形結合（和）で書く。

5 章　5.2 節　波動方程式

まず、波動方程式を覚えましょう。

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

を満たすψは波です。波動関数です。ギリシャ文字が怖い人は

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

と覚えればいいでしょう。

覚えていますか？忘れそうな人は覚え方を教えましょう。まず空間の 2 階微分と時間の 2 階微分があることを覚えて下さい。次に、（次元として）$x=vt$ ですからvをtのあるところにtの個数だけつけます。で後、符号は両辺同じです。

$$\psi=\psi \quad\Rightarrow\quad \boxed{?}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\boxed{?}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \quad\Rightarrow\quad +\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=+\frac{\partial^2\psi}{v^2\partial t^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

あくまでも覚え方ですから理論的には妥当ではないと思います。

もちろん、

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

と覚えた方がよさそうな人は自分のおぼえ方でご自由です。但し一番大切なのは（試験中）**忘れてはいけない**ことです。

色々な形の運動方程式を紹介しましょう。

① スカラー場（数値）の 1 次元の波　→　例：音波の圧力の平面波

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

② ベクトル場（ベクトル）の 1 次元の波　→　例：音波の変位の平面波、直進する光

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

③ スカラー場の 3 次元の波　→　例：音波の圧力

$$\Delta\psi\equiv\nabla^2\psi=\nabla\cdot\nabla\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

④ ベクトル場の 3 次元波　→　例：音波の変位、光

$$\nabla^2\vec{E}=\left(\nabla\cdot\nabla\right)\vec{E}=\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

横波の場合は$\left(\nabla\cdot\nabla\right)\vec{E}=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)$　なので、

$$\nabla\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

とも書ける。

立て方は？試験は5.2.1のような問題が出そうなので115ページを開きながら復習していきましょう。

まず､物理的な波は､｢Aの変化によってBが変化する､Bの変化によってAが変化する｣という概念を持っていることに注意。ですから、波の方程式を考える前に、AとBは何かを考える必要があります。

平面波の音波（長い管の中の音波）は、管内の空気（の気体分子）が通常の位置から移動することによって弾性率を通じて圧力が生じ（体積が変わるから圧力も変わる)、圧力の不均一によって合力が生じて空気（の分子）を移動させる。つまり、音波の場合はAは変位、Bは圧力です。

「管内の空気が通常の位置から移動することによって弾性率を通じて圧力が生じる」を目的にして、導入されたのは教科書の5.2式～5.4式です。5.4式は「空気の移動によって圧力はどうなる」という方程式です。

「圧力の不均一によって合力が生じて空気を移動させる。」を表した物は5.5式です。もちろん、力でものを「移動させる」式が求まるので、この段階ではニュートン運動方程式を使います。

得られた2個の式を合わせて「空気が自己制御」を意味する。5.7式で表されました。

圧力も「自己制御」するので、5.8式も圧力の波です。

他の波の場合、固体中の音波（A=固体の分子の変位、B=圧力）等も同様に考える（ことが出来るようにして下さい)。過去問を参考に。

単語

1章

単振動　＝　物体が安定な平衡点の近傍で、平衡点からの変位に比例して逆向きを持つ力を受けながら動く振動。

等時性　＝　振動の周期が振幅に依存しない現象であり、単振動の特徴付ける性質の一つである。

安定な平衡点　＝　物体がその点において静止することが可能で、変位させるとその点に向かって振動するような点。

減衰振動　→　過減衰　＝　抵抗がある程度大きくて物体が振動せずに指数関数的に減衰する。

減衰振動　＝　振幅が指数関数的に減衰する振動。

臨界減衰　＝　抵抗が特定の値に一致し、運動方程式の解の振動数が一つしかない場合である。他の抵抗の値と比べて減衰が一番速い。

オイラーの公式　＝　$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

パラメータ励振　＝　（振り子の）特徴づけるパラメータ（糸の長さ等）を（周期的に）時間変化を与えることによって振幅を増大させること。

ブランコの原理　＝　ブランコの振幅を増やし続けたい場合、角速度が 0 のとき（一番遠く行ったところ）に重心を下げ（足を下げ）、角速度が一番大きいとき（最下点）に重心を上げ（足を上げ）れば良い。

強制振動　＝　外力が働く振動。

特解（特殊解）＝　方程式を満たす解の一つで、（積分）定数がついていない解である。（つまり、一つの解だけであって任意の解にはならない。積分でいうと、$\int 2xdx = x^2$ は特解であり、$\int 2xdx = x^2 + C$ は一般解である。

但し、運動方程式の「定数」は普段の積分定数と違って時間の関数になることが多い。要は足してもまだ方程式を満たしていることです。言い換えると、もし何かの関数を運動方程式に入れると 0 になれば、その関数を特解に足して運動方程式に入れてもプラス 0 だけだから解であることに変わりはない。）

共鳴　＝　外力の振動数が、外力のない自由振動の振動数（いわゆる固有振動数）にほぼ等しくすれば振幅が急に増大する現象。

2章

うなり　＝　２つの異なる振動数の単振動の重ね合わせで、振幅が周期的に変化する

波が現れる現象。例として、お寺の鐘や音合わせ。

基準振動　＝　連成振動子が全体で共通の一つの振動数で行う(単)振動。(参考 : 基準振動の個数は、系全体を記述するための最小の座標の個数、いわゆる「自由度」に等しい。直線運動の場合は物体 1 個に左右の座標だけで位置を表せるので物体の個数に等しい。)

基準座標　＝　各基準振動の変位の時間変化を表す量である。各物体の座標の適当な線形結合で表すことができて、異なる基準振動同士は互いに独立である。

固有ベクトル　＝　各基準振動において、成分が各物体の振幅の比を表すベクトルであり、通常長さ 1 になるように選ぶ。固有ベクトルと基準座標の積の各成分は物体の座標である。

5 章

体積弾性率　＝　$K = -\dfrac{\Delta P}{\Delta V / V}$　(圧縮された体積の割合に対する圧力の増大の割合)

フルート　＝　両開端の木管楽器。

クラリネット　＝　開閉端の木管楽器。

パイプオーガン　＝　一組に 61 本、数十組の両開端のパイプの組合せの楽器。

波面　＝　波の位相が全部等しい面。

平面波　＝　波の進行方向と垂直な平面の各点に位相が全て等しい波。

続き……………………………………………………………………

頑張っていますが勉強の進み具合によって更新がない可能性がありますので、その場合は申し訳ないです。