2009 年度前期課程　　熱力学 例題２　　6 月 10 日出題
担当教員：松井哲男　　解答作成者 (TA):渡邉和宏　　クラス：理　16,19,23,28,33,37

3.(スターリング・サイクル)

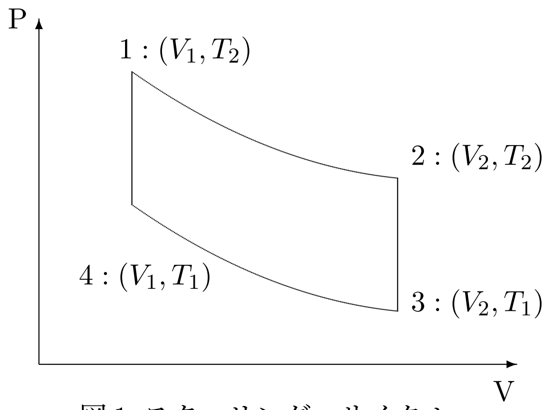

図 1. スターリング・サイクル

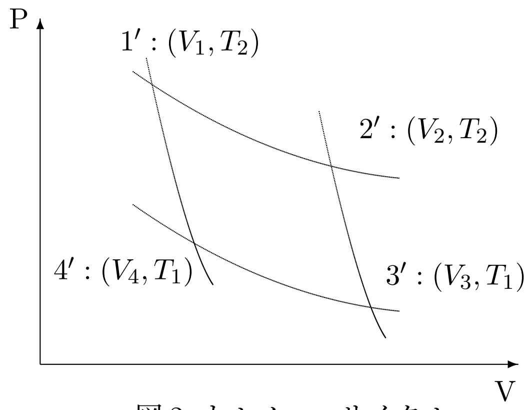

図 2. カルノー・サイクル

スターリング・サイクルの効率 η_s を求める。
１サイクルで気体がする正味の仕事 W は

$$W = W_A + W_C = \int_{(V_1,T_2)}^{(V_1,T_2)} \frac{RT}{V}dV + \int_{(V_2,T_1)}^{(V_1,T_1)} -\frac{RT}{V}dV = R(T_2 - T_1)ln\frac{V_2}{V_1}$$

受け取る熱量は A 過程及び D 過程から得られた熱量。

$$Q_A = W_A$$

$$Q_D = \Delta U = C_V(T_2 - T_1)$$

$$Q = Q_A + Q_D = RT_2 ln\frac{V_2}{V_1} + C_V(T_2 - T_1)$$

したがってスターリング・サイクルの効率 η_s は

$$\eta_s = \frac{W}{Q} = 1 - \frac{T_1(\gamma-1)ln\frac{V_2}{V_1} + (T_2 - T_1)}{T_2(\gamma-1)ln\frac{V_2}{V_1} + (T_2 - T_1)}$$

（ここで定積熱容量 C_V として $C_V = \frac{nR}{\gamma-1}$ を用いた。）

次にカルノー・サイクルの効率 η_c を求める。
２つの熱浴の温度がわかればすぐに求まり

$$\eta_c = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

２つのサイクルの効率を比較すると $\eta_s < \eta_c$ であることがわかる。

5.(人のエントロピー)

エントロピー S について $dS = \frac{dQ}{T}$ の関係から

$$S = \int \frac{1}{T}dQ = \frac{Q}{T} = \frac{2.0\times10^3\times10^3}{309}[cal/K] = 6.5\times10^3[cal/K]$$

$$(\text{または } 1cal = 4.18J \text{ として } S = 2.7 \times 10^4[J/K])$$

$1mol$ の水は $18[g]$ なので $m[g]$ では $\frac{m}{18}[mol]$ となる。水が 15[℃] で気化するときに吸収する熱量 q は

$$q = \frac{m}{18} \times 4.4 \times 10^4[J]$$

エントロピー S と熱量 q の間には $q = TS$ の関係があるので

$$m = \frac{288[K] \times 2.7 \times 10^4[J/K] \times 18[g/mol]}{4.4 \times 10^4[J/mol]} = 3.2 \times 10^3[g] = 3.2[kg]$$

10.(潜熱とエントロピー)

氷を融解して温度を上げるための熱量を水から奪うと考える。必要な氷の質量を $x[g]$ として、

$$Q_{ice} = 80[cal/g] \times x[g] + 1[cal/g \cdot K] \times 5[K] \times x[g] = 85x[cal]$$

$$Q_{water} = 200[g] \times 1[cal/g \cdot K] \times (-10)[K]$$

から $Q_{ice} = |Q_{water}|$ が成立し、

$$x = \frac{2000[cal/g]}{85[cal/g]} = 24[g]$$

次にこのときのエントロピーの増加量を求める。

水と氷のエントロピー変化 ΔS_{ice},ΔS_{water} を水の質量 M と氷の質量 x, 定圧熱容量 C_P を用いて表すと、

$$\Delta S_{water} = MC_P \int_{288}^{278} \frac{1}{T} dT = -MC_P ln\frac{288}{278} = -200[g] \times 1[cal/g \cdot K] \times 0.035 = -7[cal/K]$$

$$\Delta S_{ice} = x\left[C_P \int_{273}^{278} \frac{1}{T} dT + \frac{80[cal/g]}{273[K]}\right] = x\left[ln\frac{278}{273} + \frac{80[cal/g]}{273[K]}\right] = 7.32[cal/K]$$

$$\therefore \Delta S = \Delta S_{water} + \Delta S_{ice} = 0.32[cal/K] = (1.3[J/K])$$

11.(冷却と仕事)

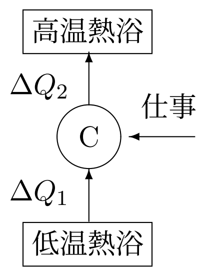

図 3. ヒートポンプ概念図

温度 T の物質 (低温熱浴) から熱量 ΔQ を奪い、外部からヒートポンプに仕事 ΔW を与え、$\Delta Q_2 = \Delta W + \Delta Q$ の熱量を温度 $T_1(> T)$ の部屋 (高温熱浴) に放出する。

可逆機関では、

$$\frac{\Delta Q_2}{\Delta Q} = \frac{T_1}{T} \qquad \therefore \Delta Q_2 = \Delta Q\frac{T_1}{T}$$

ヒートポンプに与える仕事 ΔW は、

$$\Delta W = \Delta Q_2 - \Delta Q = \Delta Q(\frac{T_1}{T} - 1) > 0$$

ここで、$\Delta Q = C|dT| = -CdT \qquad (C = const.)$

これを順次働かせることで可逆的に物質から熱を奪えるので、

$$W = \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{T_1}{T} - 1\right) dQ = \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{T_1}{T} - 1\right)(-CdT) = C\int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{T_1}{T} - 1\right) dT$$

$$= C\left[T - T_1 lnT\right]_{T_1}^{T_2} = C\left[T_1\left(ln\frac{T_1}{T_2} - 1\right) + T_2\right] \qquad (T_1 > T_2)$$

次に水を冷やして氷を作る場合の仕事を求める。1 気圧のもとでの定圧熱容量 C を $1cal/g\cdot K$ とする。

$$T_1 = 288K(= 15\,℃), T_2 = 273K(= 0\,℃)$$

として、外から与える仕事 W_1 は上で求めた関係式より

$$W_1 = 1[cal/g\cdot K] \times 10^3[g] \times \left[288ln\frac{288}{273} - 15\right] = 2.6 \times 10^2[cal](= 1.1 \times 10^3[J])$$

さらに、氷を作るためには熱量 ΔL を 0 ℃の水から奪って 15 ℃の熱浴に出すと考えれば、必要な仕事 W_2は

$$W_2 = \Delta L \times \frac{288 - 273}{273} = 80[cal/g] \times 10^3[g] \times \frac{15}{273} = 4.4 \times 10^3[cal](= 1.8 \times 10^4[J])$$

従って求める仕事 W は

$$W = W_1 + W_2 = 4.7 \times 10^3[cal](= 1.9 \times 10^4[J])$$