あな、信じようぞ。

我(わ)とて、神に誓いて、他に想い人など在りんせん。

きみこそ、真(まこと)の姫なりて。

萌える図形科学　最終第X章 Extra

第一般　なし

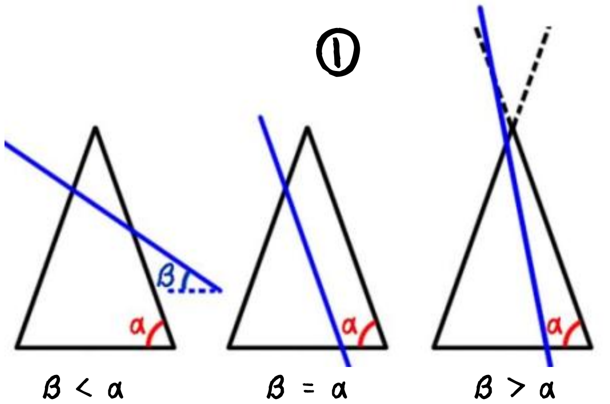
version β　2006/10/28

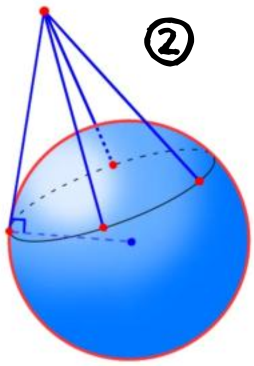
　この章では、05、06年度の期末試験問題に関する証明を解説することにいたします.
　問題を解く上で、原理の理解が必ずしも必要なわけではないですが、06年度の大問２は、ほとんどがこの定理の導出そのものでした.特に円錐の断面については、やっぱり、知っておいた方がよろしいかと思います.
　06年度の過去問は問題を手に入れたら、作るつもり…です……さて困りました.

1.直円錐の断面

　平面で直円錐をバッサリ切ってみましょう.
このとき、平面の角度によって断面の二次曲線が変わります.切断平面の水平傾角を β として

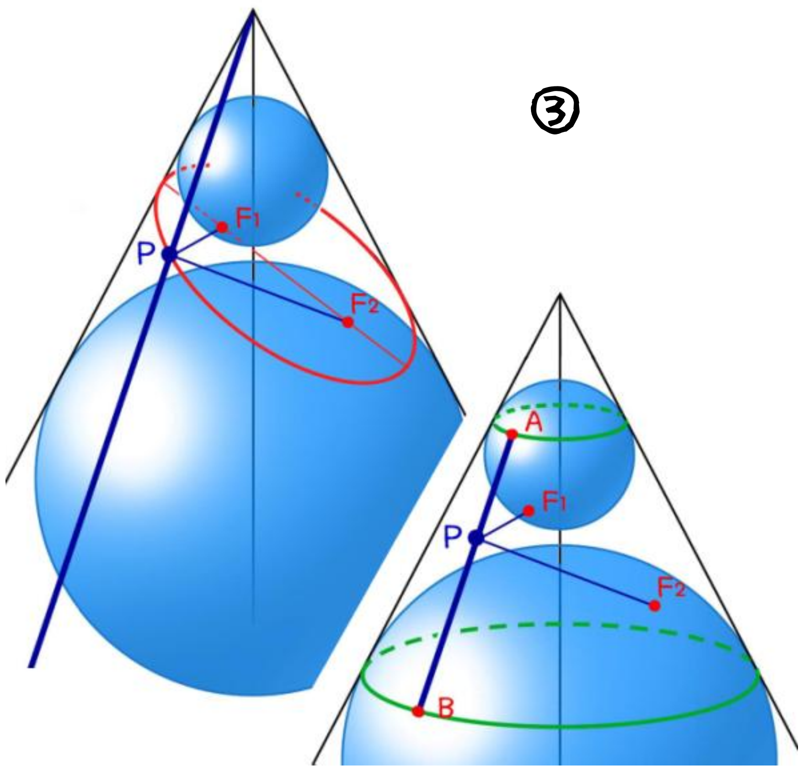
1）$\beta < \alpha$ のとき　…　楕円
2）$\beta = \alpha$ のとき　…　放物線
3）$\beta > \alpha$ のとき　…　双曲線





1）$\beta < \alpha$ のとき

　平面・円錐両方に接する球を考えてみましょう.これは必ず２つ存在しますね.切断平面と２つの球のそれぞれの交点を F_1、F_2 とします.これらが焦点です.
　楕円である ⇔ 曲線上の任意点Pに対して $PF_1 + PF_2 = Const$ であるので、これを証明しますです.
○の図を見れば明らかですが、"球外の点からの接線の長さは一定"により、○$PF_1 = PA$、$PF_2 = PB$ なので、容易に $PF_1 + PF_2 = AB = Const.$（円錐と２内接球を決めれば一意）が示され、この曲線が楕円であると分かります.

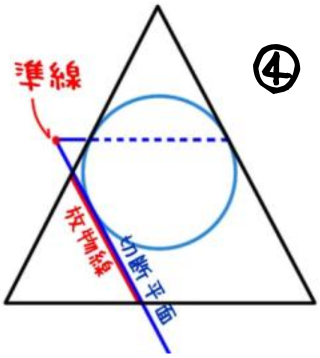


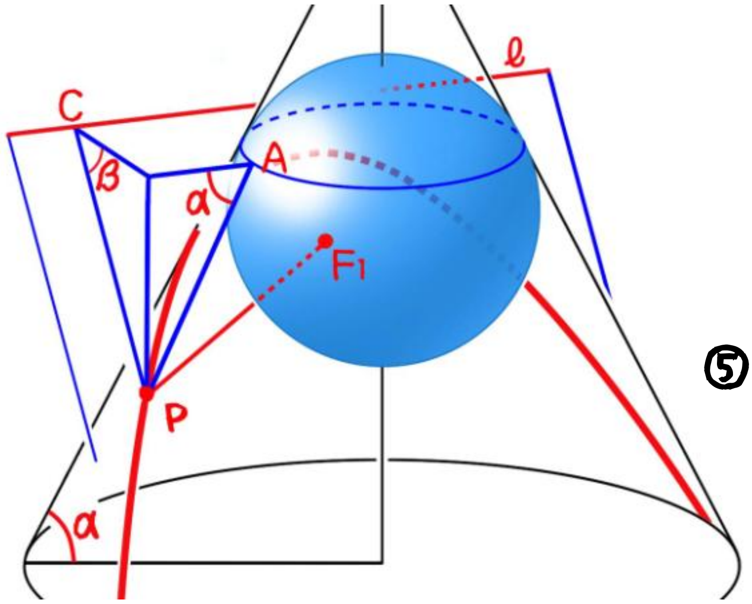
2）$\beta = \alpha$ のとき

断面図形は放物線となります．放物線の図形的定義は"焦点からの距離＝準線からの距離"ですね．

まず1）と同様に $PF_1 = PA$ が成り立ち、さらに $\angle C = \beta$、錯角より $\angle A = \alpha$、ここで仮定より $\angle C = \angle A$．よって $PF_1 (= PA) = PC$ がいえるので、任意の点Pに対して"焦点からの距離＝準線からの距離"であり、この曲線が放物線であることが示されます．

"切断平面と、球の接触円を含む平面の交線"が準線lになることを知らなければ自分で証明することは難しいかと……

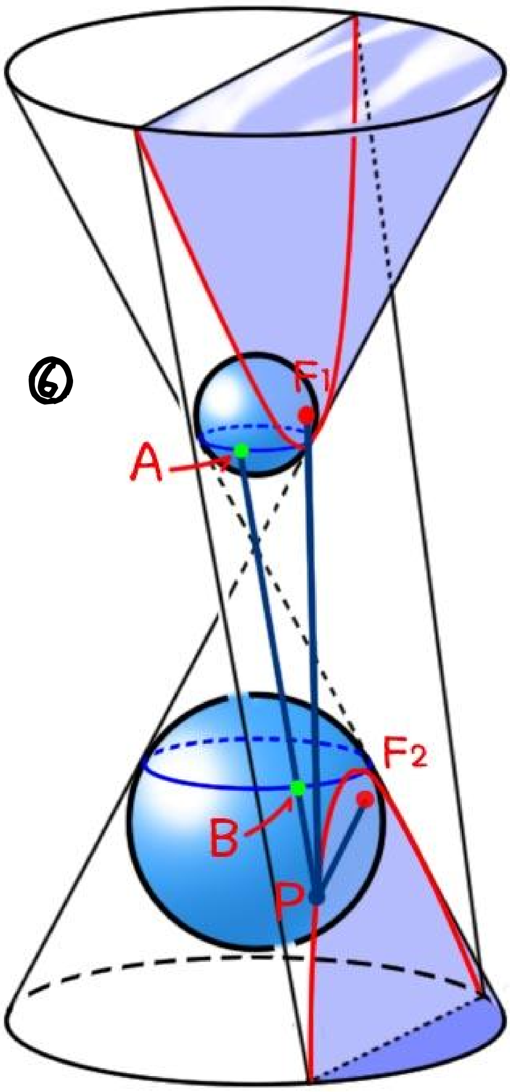




3）$\beta > \alpha$ のとき

で、最後ですが、$\beta > \alpha$ のときも内接球は必ず2つ存在します．

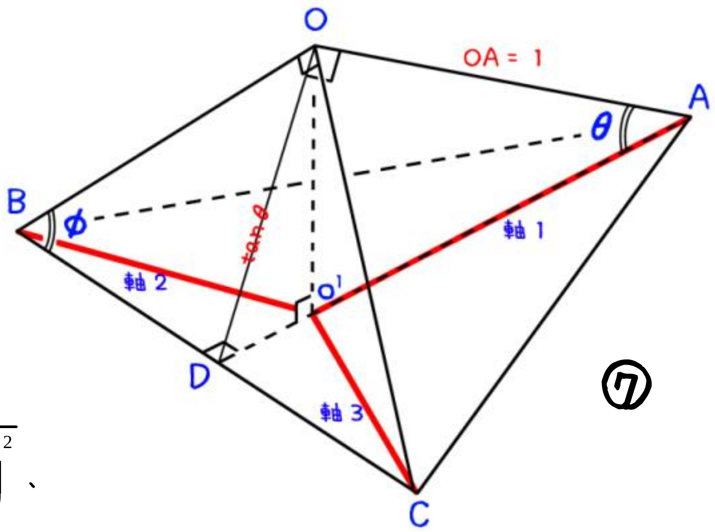
曲線上任意の点Pに対して、今までと全く同様に $PF_1 = PA$、$PF_2 = PB$ が成り立つので、$PF_1 - PF_2 (= PA - PB) = AB = Const.$ が示され、"任意の点Pに対して、焦点からの距離の差が一定"と分かり、この曲線は双曲線です．



2. 軸測投影

　さて、⑦のように θ、ϕ を設定して考察することにします．この２変数で３軸を指定できます．

　また、簡単のためどこか一辺を長さ１にしても一般性を失いません．OA＝1とします．



次に $OB\sin\phi = \tan\theta$ より $OB = \dfrac{\tan\theta}{\sin\phi}$、

$$o^1B = \sqrt{(BD)^2 + (o^1D)^2} = \sqrt{(OB\cos\phi)^2 + \left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)^2}$$、

$$OC = \frac{\tan\theta}{\sin(90^\circ - \phi)} = \frac{\tan\theta}{\cos\phi}、\quad o^1C = \sqrt{(OC\sin\phi)^2 + \left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)^2}$$ 以上から、

$$\varepsilon_1 = \cos\theta \qquad \varepsilon_2 = \frac{\sqrt{\left(\dfrac{\tan\theta}{\sin\phi}\cos\phi\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)^2}}{\dfrac{\tan\theta}{\sin\phi}} \qquad \varepsilon_2 = \frac{\sqrt{\left(\dfrac{\tan\theta}{\cos\phi}\sin\phi\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)^2}}{\dfrac{\tan\theta}{\cos\phi}}$$

$$\therefore \varepsilon_1{}^2 + \varepsilon_2{}^2 + \varepsilon_3{}^2$$

$$= \cos^2\theta + \frac{\sin^2\phi}{\tan^2\theta}\left(\frac{\tan^2\theta\cos^2\phi}{\sin^2\phi} + \cos^2\theta + \frac{1}{\cos^2\theta} - 2\right) + \frac{\cos^2\phi}{\tan^2\theta}\left(\frac{\tan^2\theta\sin^2\phi}{\cos^2\phi} + \cos^2\theta + \frac{1}{\cos^2\theta} - 2\right)$$

$$= \cos^2\theta + (\cos^2\phi + \sin^2\phi) + \frac{\cos^4\theta}{\sin^2\theta}(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + \frac{1}{\sin^2\theta}(\cos^2\phi + \sin^2\phi) - \frac{2}{\tan^2\theta}(\cos^2\phi + \sin^2\phi)$$

$$= \cos^2\theta + 1 + \frac{1}{\sin^2\theta}(\cos^4\theta - 2\cos^2\theta + 1)$$

$$= \cos^2\theta + 1 + \frac{1}{\sin^2\theta}(1 - \cos^2\theta)^2$$

$$= \cos^2\theta + 1 + \frac{\sin^4\theta}{\sin^2\theta}$$

$= 2.$

　おもしろくもなんともないかもしれませんが、確かに縮率の二乗の和は２になることが分かりました．加藤教官曰く「余弦定理で証明できる」とのことですが私には分かりませんでした……

　図形科学についてはひとまずここで終わります．お疲れ様でしたご主人様！
至らない点も多かったと思いますがこれからもまじめに頑張…　……ってシケプリメイデンはまだまだ続くのでした…
というわけなので、これからもよろしくお願いしますでするっ！

聴いてたもの．
秋のうた．

製作　RAG