6 級数、一様収束の概念、べき級数

6.1 級数

数列$\{a_n\}$に対して、

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots\cdots + a_n$$ とおく。

・数列$\{S_n\}$が収束するとき、$\{S_n\}$の極限値を

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

と書く。

$$\left(\text{つまり、} \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n \right)$$

このとき、級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$は収束するという。

・数列$\{S_n\}$が発散するとき、

級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$は発散するという。

特に$\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$のとき、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$と書く。(複号同順)

例

等比級数$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$が収束 $\iff |r|<1$

定理6.1

級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$と$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$が収束するとする。

このとき、

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (c\,a_n) = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (cは定数)

定理 6.2（コーシー条件）

(a) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する．

$\Longleftrightarrow$ (b) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. 「$m > n \geq N \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$」

証明

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とする。

(a) $\Longleftrightarrow$ S_n が収束する．

$\Longleftrightarrow$ S_n がコーシー列

$\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ s.t.

「$m > n \geq N \Rightarrow |\underbrace{S_m - S_n}_{=\sum_{k=n+1}^{m} a_k}| < \varepsilon$」

系

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する．$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

∵ 定理 6.2 (b) で $n \geq N$, $m = n+1$ とするとより。

$\left(|a_{n+1}| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+1} a_n\right| < \varepsilon \quad \therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \right)$

注意

この系の逆は必ずしも成り立たない．

例えば，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ だが，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} < \infty$

$a_n \geqq 0\ (n \leqq N)$ のとき、
級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を<u>正項級数</u>という。

正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とすると、$\{S_n\}$ は増加列。

・$\{S_n\}$ が有界である $\Longleftrightarrow$ 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する。

・$\{S_n\}$ が有界でない $\Longleftrightarrow$ 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は ∞ に発散する。

正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することを $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ と表す。

<u>定理 6.3 (比較判定法)</u>
$\exists K \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geqq K$, $0 \leqq a_n \leqq b_n$ であるとする。
(1) 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束する。$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。

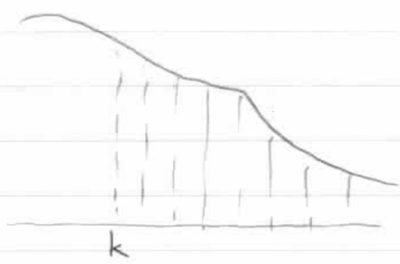
(2) 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散する。$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は発散する。

<u>証明</u>
(1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束 $\overset{①}{\Longleftrightarrow}$ 数列 $\left\{\sum_{n=1}^{N} b_n\right\}_N$ が有界

$n \geqq k \Rightarrow 0 \leqq a_n \leqq b_n$ $\Longrightarrow$ 数列 $\left\{\sum_{n=1}^{N} a_n\right\}_N$ が有界

$\underset{①}{\Longleftrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束

<u>定理 6.4</u> (積分判定法)
$K \in \mathbb{N}$ とし、f は区間 $[K, \infty)$ 上の連続な単調減少関数で
$$f(x) \geqq 0 \qquad \forall x \in [K, \infty)$$
であるとする。
このとき、



(a) 正項級数 $\sum_{n=K}^{\infty} f(n)$ が収束する。

$\Longleftrightarrow$ (b) 広義積分 $\int_K^{\infty} f(x)\,dx$ が収束する。

証明

$n \in \mathbb{N}$, $n \geqq K$ のとき、fは単調減少関数なので

$n \leqq x \leqq n+1$ のとき、　$f(n+1) \leqq f(x) \leqq f(n)$

nから$n+1$まで積分すると、

$$f(n+1) \leqq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqq f(n)$$

$m \in \mathbb{N}$, $m > K$とする。nについてkからmまで和をとると、

$$\sum_{n=k+1}^{m+1} f(n) = \sum_{n=k}^{m} f(n+1) \leqq \int_k^{m+1} f(x)\,dx \leqq \sum_{n=k}^{m} f(n) \quad \cdots \ (*)$$

(a) $\Longleftrightarrow$ 数列 $\left\{\sum_{n=k}^{m} f(n)\right\}_m$ が上に有界。

$\underset{(*)}{\Longleftrightarrow}$ 数列 $\left\{\int_k^{m+1} f(x)\,dx\right\}_m$ が上に有界。

$\Longleftrightarrow$ 関数 $F(t) = \int_k^t f(x)\,dx$ が $[K, \infty)$ で上に有界。

$\Longleftrightarrow$ $\lim_{t\to\infty} F(t)$ が存在する。$\Longleftrightarrow$ (b)

$F(t)$は単調増加

例

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ が収束する $\Longleftrightarrow$ $p > 1$

覚える。

証明

・$p \leqq 0$ のとき、$\frac{1}{n^p} \not\to 0 \ (n \to \infty)$ なので $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ は発散する。

・$p > 0$ のとき、

関数 $\frac{1}{x^p}$ は $[1, \infty)$ 上 非負、連続、単調減少なので、定理6.4より、

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ が収束。$\Longleftrightarrow$ $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ が収束 $\underset{\text{既知}}{\Longleftrightarrow}$ $p > 1$

定理6.5 (コーシーの判定法)

$a_n \geqq 0 \ (n \in \mathbb{N})$ とし、

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r \quad (0 \leqq r \leqq \infty)$$

であるとする.
このとき、

(1) $0 \leqq r < 1 \Rightarrow$ 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

(2) $1 < r \leqq \infty \Rightarrow$ 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する.

(注、$r=1$ のときは一般には判定不能)

証明

$0 \leqq r < \infty$ のとき、
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geqq N$, $|\sqrt[n]{a_n} - r| < \varepsilon$ ……①
(1) $0 \leqq r < 1$ とする.
①より、$\forall n \geqq N$, $0 \leqq \sqrt[n]{a_n} < r + \varepsilon$
$\forall n \geqq N$, $0 \leqq a_n < (r+\varepsilon)^n$ ……②
$0 < r < 1$ より、$\varepsilon = \frac{1-r}{2} > 0$ をとると、$r + \varepsilon = \frac{1+r}{2} < 1$

②より、$\forall n \geqq N$、$0 \leqq a_n < \left(\frac{1+r}{2}\right)^n$

$0 \leqq \frac{1+r}{2} < 1$ より、$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+r}{2}\right)^n$ が収束するので、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

(2) $1 < r \leqq \infty$ のとき、数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しないことを示せば十分。
(i) $1 < r < \infty$ のとき、
①より、$\forall n \geqq N$ $\sqrt[n]{a_n} > r - \varepsilon$ ……②
$r > 1$ なので $\varepsilon = \frac{r-1}{2} > 0$ とおくと、

$\forall n \geqq N$, $\sqrt[n]{a_n} > r - \varepsilon = \frac{r+1}{2} > 1$ $\quad \therefore \forall n \geqq N$, $a_n > 1$

$a_n \not\to 0 \ (n \to \infty)$
(ii) $r = \infty$ のとき、すなわち $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty$ のとき、
$\exists K \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geqq K$, $\sqrt[n]{a_n} > 1$ $\quad \therefore \forall n \geqq K$ $a_n > 1$
$\therefore a_n \not\to 0 \ (n \to \infty)$
以上より、$1 < r \leqq \infty$ のとき、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する.

定理 6.6（ダランベールの判定法）

$a_n \geqq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ で、$a_n = 0$ となるnは有限個とする。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \quad (0 \leqq r \leqq \infty)$$

であるとする。

このとき、

(1) $0 \leqq r < 1 \Rightarrow$ 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。

(2) $1 < r \leqq \infty \Rightarrow$ 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。

（注、$r=1$ のときは一般には判定不能）　　　証明略

注意

コーシーの判定法、ダランベールの判定法で $r=1$ のときは一般に判定不可能。

例えば、$a_n = \frac{1}{n}$　$b_n = \frac{1}{n^2}$ とすると、

・$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$ $(n\to\infty)$　　$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \to 1$ $(n\to\infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \ (\text{発散})$$

・$\sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} \to 1$ $(n\to\infty)$　　$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$ $(n\to\infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \ (\text{収束})$$

例

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ は収束するか？

解答　$a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ とすると、

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1 \quad (n\to\infty)$$

コーシーの判定法より、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。

例

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ は収束するか？

解答 $a_n = \frac{n^2}{3^n}$ とすると、$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \to \frac{1}{3} < 1 \quad (n\to\infty)$

ダランベールの判定法より、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。

正の項と負の項が交互に表れる級数を交代級数という。
交代級数は $a_n > 0 \ (n \in \mathbb{N})$ となる数列 $\{a_n\}$ を用いて

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

又は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots$$

のいずれかで表される。

定理 6.7
数列 $\{a_n\}$ が以下をみたすとする。
(i) $a_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N})$
(ii) a_n は減少列
(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
このとき、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ は収束する。

これは交代級数

例

$p>0$ のとき、交代級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ は収束する。$\left(a_n = \frac{1}{n^p}\text{ とおけばよい}\right)$

定理 6.7 の証明

$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k$ とする。

$\{S_n\}$ の部分列 $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{S_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ が同じ値に収束することを示せば十分。

$$S_{2n+2} = S_{2n} + (-1)^{2n} a_{2n+1} + (-1)^{2n+1} a_{2n+2}$$
$$= S_{2n} + \underbrace{(a_{2n+1} - a_{2n+2})}_{\geq 0 \ (\because\ a_n\text{ が減少列})} \geq S_{2n}$$

$\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ は増加列

$$S_{2n} = a_1 + (\underbrace{-a_2 + a_3}_{\leqq 0}) + (\underbrace{-a_4 + a_5}_{\leqq 0}) + \cdots + (\underbrace{-a_{2n-2} + a_{2n-1}}_{\leqq 0}) \underbrace{- a_{2n}}_{\leqq 0} \leqq a_1$$

($\because$ a_n が減少列)

$\{S_{2n}\}$ は上に有界.

$\therefore$ $\{S_{2n}\}$ は収束する. $S = \lim_{m\to\infty} S_{2m}$ とする.

$$S_{2m+1} = S_{2m} + (-1)^{2m} a_{2m+1} = \underset{\downarrow S}{S_{2m}} + \underset{\downarrow 0\ (m\to\infty)}{a_{2m+1}} \longrightarrow S + 0 = S \ (m\to\infty)$$

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = \lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = S$$

$\{S_n\}$ は収束する.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ は収束する.

級数 $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|}_{\text{正項級数}}$ が収束するとき、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束するという.

定理 6.8

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束する. $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束し, $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ …(*)

証明

$\varepsilon > 0$ を任意にとる.

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するので、コーシー条件より、

$^\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. 「$m > n \geqq N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$」

$m > n \geqq N$ のとき, $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leqq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right| \leqq \sum_{n=1}^{N} |a_n|$ で $N \to \infty$ として (*) を得る.

注意

定理 6.8 の逆は必ずしも成立しない.

例えば,

・定理 6.7 より,

$p > 0$ のとき, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ は収束する.

・$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1$

従って、$0 < p \leqq 1$ のとき、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ は収束するが、絶対収束しない。

収束するが絶対収束しない級数は条件収束するという。

6.2. 関数列の一様収束

区間I上の関数の列

$$\begin{array}{ccccc} f_1, & f_2, & f_3, & \cdots\cdots, & f_n, \cdots \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & & \shortparallel \\ f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & & f_n(x) \end{array}$$

を区間I上の関数列といい、$\{f_n\}$ や $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ と表す。

定義（関数列の各点収束）

Iを区間 $\{f_n\}$ をI上の関数列とする。

$\forall x \in I$ に対して、極限

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

が存在するとき、関数列 $\{f_n\}$ は区間Iで関数 f に各点収束するといい、f を $\{f_n\}$ の極限関数という。

$\{f_n\}$ が区間Iで f に各点収束する。

$\iff \forall x \in I \quad \displaystyle\lim_{n\to\infty}|f_n(x) - f(x)| = 0$

定義（関数列の一様収束）

Iを区間、$\{f_n\}$ をI上の関数列、f をI上の関数とする。

関数列 $\{f_n\}$ が区間Iで関数 f に一様収束するとは、

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)|\right) = 0$$

が成り立つことを言う。

注意

$\{f_n\}$ が区間Iで f に一様収束する。

$\Longrightarrow \{f_n\}$ は 〃 各点収束する。

$\left(\because\ \forall x \in I \quad |f_n(x) - f(x)| \leqq \displaystyle\sup_{t\in I}|f_n(t) - f(t)| \longrightarrow 0\ (n\to\infty)\right)$

例

$f_n(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N}, x \in [0,1])$ とする.

(1) $0 < a < 1$ とすると、$\{f_n\}$ は $[0,a]$ で定数関数 0 に一様収束する。

(2) $\{f_n\}$ は $[0,1)$ で一様収束しない。

証明

$x \in [0,1]$ のとき、

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \text{ のとき、} \\ 1 & x = 1 \text{ のとき、} \end{cases}$$

(1) $0 < a < 1$ とする。

$$\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - \underset{\substack{\| \\ 0\,(x\in[0,a])}}{f(x)}| = \sup_{x\in[0,a]} x^n = a^n \to 0 \ (n\to\infty)$$

$\therefore$ $\{f_n\}$ は $[0,a]$ で 0 に一様収束。

(2) $$\sup_{x\in[0,1)} |f_n(x) - \underset{\substack{\| \\ 0\,(x\in[0,1])}}{f(x)}| = \sup_{x\in[0,1)} x^n = \quad \not\to 0 \ (n\to\infty)$$

$\therefore$ $\{f_n\}$ は $[0,1)$ で一様収束しない。

例 $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$ $(n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R})$ とする.

$\{f_n\}$ は $\mathbb{R}$ 上定数関数 0 に一様収束する。

証明

$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\sin nx}{n}\right| \overset{(*)}{\leqq} \frac{1}{n} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

$\therefore$ $\{f_n\}$ は $\mathbb{R}$ 上 0 に各点収束.

$(*)$ より、

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\sin nx}{n}\right| \leqq \frac{1}{n} \to 0 \ (n\to\infty)$$

$\therefore$ $\{f_n\}$ は $\mathbb{R}$ 上 0 に一様収束する。

注意

$\{f_n\}$ が区間 I で f に各点収束する.

$\iff$ $\forall x \in I$ に対して、数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $f(x)$ に収束する.

$\iff$ $\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geqq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

定理 6.9

Iを区間，$\{f_n\}$をI上の関数列。fをI上の関数とする.

(A) $\{f_n\}$がIでfに一様収束する.

$\Longleftrightarrow$ (B) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geqq N,\ \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

証明

(A) $\Rightarrow$ (B)

$\varepsilon > 0$を任意にとる. (A)より、

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \geqq N,\ \sup_{t \in I} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$$

$\therefore \forall n \geqq N.\ \forall x \in I$に対して

$$|f_n(x) - f(x)| \leqq \sup_{t \in I} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$$

$\therefore$ (B)が成立.

(B) $\Rightarrow$ (A)

$\varepsilon > 0$を任意にとる. (B)より、

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \text{s.t.}\ \forall n \geqq N,\ \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall n \geqq N,\ \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sup_{t \in I} |f_n(t) - f(t)| \right) = 0$$

(A)が成立。

関数列$\{f_n\}$が区間I上の連続関数の列であるとは、

$f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n \cdots\cdots$

が全てI上の連続関数であることを言う.

注意

連続関数の列$\{f_n\}$が区間Iで関数fに各点収束していても、一般にはfはIで連続であるとは限らない。

例えば、$f_n(x) = x^n$とすると、$\{f_n\}$は$[0,1]$上の連続関数であるが

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \text{ のとき、} \\ 1 & x = 1 \text{ のとき.} \end{cases} \quad (\leftarrow \text{各点収束})$$

$\uparrow$ これは$[0,1]$上連続でない。

定理 6.10

区間I上の連続関数の列$\{f_n\}$がIで関数fに一様収束する.

$\Rightarrow$ fはI上の連続関数である。

証明

$a \in I$ を任意にとり、f が点 $x=a$ で連続であることを示す.

$\varepsilon > 0$ を任意にとる.

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall x \in I,\ |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \cdots ①$$

f_N は I で連続なので、

$$\exists \delta > 0 \text{ s.t. } \lceil |x-a| < \delta,\ x \in I \Rightarrow |f_N(x) - f_N(a)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \cdots ②$$

①, ② より、$|x-a| < \delta$, $x \in I$ ならば、…

$$|f(x) - f(a)| \leqq \underbrace{|f(x) - f_N(x)|}_{①} + \underbrace{|f_N(x) - f_N(a)|}_{②} + \underbrace{|f_N(a) - f(a)|}_{①}$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

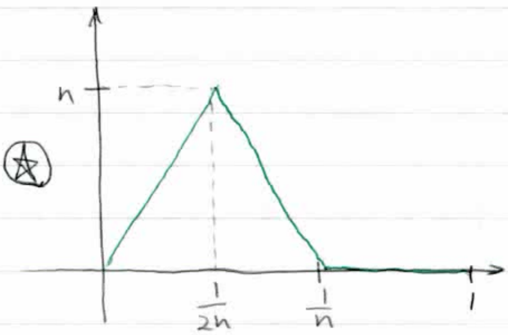
f は点 a で連続

注意

定理 6.10 の逆の主張は必ずしも成り立たない。

例えば、$n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$ に対して

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2 x & \left(0 \leqq x \leqq \frac{1}{2n}\right) \\ -2n^2\left(x - \frac{1}{n}\right) & \left(\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{n}\right) \\ 0 & \left(\frac{1}{n} \leqq x \leqq 1\right) \end{cases} \quad \cdots ☆$$



連続関数の列 $\{f_n\}$ は $[0,1]$ で連続関数 $f(x) = 0$ に各点収束するが一様収束しない。

$\because$ (i) 各点収束すること

・$0 < x \leqq 1$ となる x を任意にとると、

$n > \frac{1}{x}$ となる任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n(x) = 0$

$$\forall x \in (0,1],\ \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$$

・$\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$

$$\forall x \in [0,1],\ \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$$

(ii) 一様収束しないこと

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - \underset{\overset{\|}{0}}{f(x)}| = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = n \to \infty \quad (n\to\infty)$$

∴ 一様収束していない。

注意

一般に連続関数の列 $\{f_n\}$ が閉区間 $[a,b]$ で連続関数 f に各点収束しても、

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \quad \left(= \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx\right)$$

が成り立つとは限らない。

例えば、Ⓐの関数列 $\{f_n\}$ について、

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}\times\frac{1}{n}\times n = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

異なる。

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$$

定理 6.11（積分と極限の順序交換）

閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数の列 $\{f_n\}$ が $[a,b]$ で関数 f に一様収束する

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \quad \cdots\cdots (*)$$

（注
定理 6.10 より、f は $[a,b]$ 上連続なので、f は $[a,b]$ 上可積分）

証明

$$\left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx\right| \leqq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx$$

$$\leqq \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \int_a^b 1\,dx$$

$$= (b-a)\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$$

∴ $(*)$ が成立。

例

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 e^{\frac{x^2}{n}}\,dx$ を求める。

o. Date . .

解答

$f_n(x) = e^{\frac{x^2}{n}}$ とする

$\forall x \in [0,1]$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{x^2}{n}} = 1$

$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 1| = \sup_{x\in[0,1]} (e^{\frac{x^2}{n}} - 1) = e^{\frac{1}{n}} - 1 = 0 \ (n\to\infty)$

$\{f_n\}$ は $[0,1]$ で 1 に一様収束する。

定理 6.11 より

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 e^{\frac{x^2}{n}} dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} e^{\frac{x^2}{n}}\right) dx = \int_0^1 1\, dx = 1$$

注

定理 6.11 の逆の主張は必ずしも成り立たない。

例えば、☆ の $\{f_n\}$ について、

$\{f_n\}$ は、$[0,1]$ で 0 に各点収束するが、一様収束しない。(先と同様)

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} \times 1 = \frac{1}{2n} \longrightarrow 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0 = \int_0^1 \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{f(x)}\, dx$$

定理 6.12 (微分と極限の順序交換)

$\{f_n\}$ を閉区間 $I = [a,b]$ 上の関数列とし、以下が成り立つとする.

(i) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、関数 f_n は I 上 C^1 級

(ii) $\{f_n\}$ は I で f に各点収束する.

(iii) $\{f_n'\}$ は I で g に各点収束する。

このとき、f は I 上 C^1 級で $f'(x) = g(x)$, $x \in I$

$$\underset{\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)}{\shortparallel} \qquad \underset{\lim_{n\to\infty} f_n'(x)}{\shortparallel}$$

証明

f_n は $I = [a,b]$ 上 C^1 級なので、

$$\int_0^x f_n'(t)\,dt = f_n(x) - f_n(a) \cdots\cdots (*)$$

(両辺で $n\to\infty$ としたい)

$\{f_n'\}$ は I 上の連続関数の列なので、(iii) より g は I 上連続。

$x \in [a,b]$ に対して、

$$\left| \int_a^x f_n'(t)\,dt - \int_a^x g(t)\,dt \right| \leqq \int_a^x |f_n'(t) - g(t)|\,dt$$

$$\leqq (b-a) \sup_{t\in[a,b]} |f_n'(t) - g(t)| \underset{\uparrow \text{(iii)}}{\longrightarrow} 0 \quad (n\to\infty)$$

$$\forall x \in I,\ \int_0^x f_n'(t)\,dt \longrightarrow \int_0^x g(t)\,dt \quad (n\to\infty)$$

$(*)$ で、$n\to\infty$ として、

$$\int_a^x g(t)\,dt = f(x) - f(a)$$

g は連続なので、f は I 上 C^1 級で

$$f'(x) = g(x) \qquad x \in I$$