3重積分について

定理

$D \subset \mathbb{R}^2$を面積確定な有界閉領域とし、$\varphi_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y)$をD上の連続関数で、$\varphi_1(x,y) \leqq \varphi_2(x,y)$ $({}^\forall(x,y) \in D)$とする。

$G = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D \cdot \varphi_1(x,y) \leqq z \leqq \varphi_2(x,y)\}$

とする。(このときGは体積確定)

$f(x,y,z)$をG上の連続関数とすると、

2変数関数 $\displaystyle\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$ はD上連続で

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz := \iint_D \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right) dx\,dy$$

5.3 重積分における変数変換

定理 5.11

(変数変換公式(2変数))

D, Ωを$\mathbb{R}^2$の面積確定な有界閉領域とする。

$x = \varphi(u,v)$ $y = \psi(u,v)$を$\Omega \subset U$となるある領域上のC^1級関数とする。

写像 $\Phi : U \to \mathbb{R}^2$を

$\Phi(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v)) = (x,y)$, $(u,v) \in U$

で定める。

$$J_\Phi(u,v) = \det\begin{pmatrix} \varphi_u(u,v) & \varphi_v(u,v) \\ \psi_u(u,v) & \psi_v(u,v) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$ とする。

以下が成り立つとする。

(a) $D = \Phi(\Omega) = \{\Phi(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v)) \mid (u,v) \in \Omega\}$

(b) $N \subset \Omega$となるある面積0の集合Nが存在して、($N = \phi$でもかまわない)

(b-1) Φは$\Omega \setminus N$上 1対1

(b-2) ${}^\forall(u,v) \in \Omega \setminus N$に対して、$J_\Phi(u,v) \neq 0$

このとき、D上の連続関数$f(x,y)$に対して次が成立。

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Omega f(\varphi(u,v), \psi(u,v))\,|J_\Phi(u,v)|\,du\,dv$$

$J_\Phi(u,v)$をΦのヤコビ行列式 又は ヤコビアン という。

(注意)

例えば、Nとして

・$N=\phi$（空集合）

（以後、空集合は面積0の集合と約束する。）

・面積確定集合Ωの境界$\partial\Omega$やその一部

・Ωに含まれるC^1級曲線など.

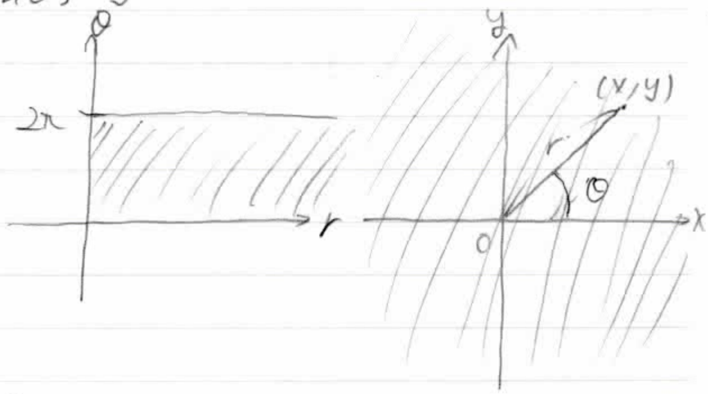
例（平面での極座標変換）

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(r,\theta)=r\cos\theta \qquad y=\psi(r,\theta)=r\sin\theta \\ \Phi(r,\theta)=(\varphi(r,\theta),\psi(r,\theta))=(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}\right\}$$ とする.

ヤコビアンは、

$$J_\Phi(r,\theta)=\det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}=r$$

覚える.



$A=[0,\infty)\times[0,2\pi]$

$=\{(r,\theta) \mid r\geq 0,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}$ とする.

明らかに $\Phi(A)=\mathbb{R}^2$

(r,θ)はAの中で考える.

D,Ωは $D\subset\mathbb{R}^2$、$\Omega\subset A$となる面積確定な有界閉領域で、$D=\Phi(\Omega)$であるとする.
このとき、D上の連続関数$f(x,y)$に対して、

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_\Omega f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

ヤコビアン

∵ 条件(a)はOK。条件(b)が成り立つことの確認

・ΦはAの有界部分集合で1対1とは限らない。

$$\left(\begin{array}{ll} ∵\ \cdot\forall\theta\ [0,2\pi] & \Phi(0,\theta)=(0,0) \\ \quad\ \cdot\forall r\geq 0 & \Phi(r,0)=\Phi(r,2\pi)=(r,0) \end{array}\right)$$

・$J_\Phi(0,\theta)=0 \quad (\forall\theta\in[0,2\pi])$

$C=\{(r,\theta) \mid r=0$ 又は $\theta=2\pi\}$ とすると、

Φは$A\setminus C$上1対1で $J_\Phi(r,\theta)=r\neq 0 \quad (\forall(r,\theta)\in A\setminus C)$

$N=\Omega\cap C$とすると、Nは面積0である.

（空集合であることもありえる）

$\Omega\setminus N=\Omega\setminus C\subset A\setminus C$ なので

Φは$\Omega\setminus N$上1対1で

$\forall(r,\theta)\in\Omega\setminus C$に対して $J_\Phi(r,\theta)=r>0$

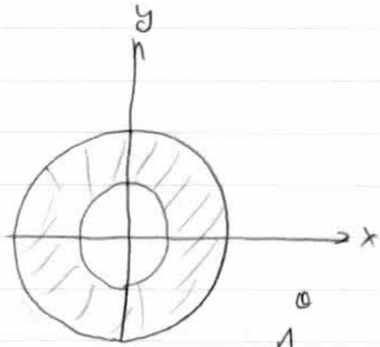
ゼロではない.

定理5.11より(＊)を得る.

例題

$D=\{(x,y) \mid a^2 \leqq x^2+y^2 \leqq b^2\}$ $(0<a<b)$ とする.

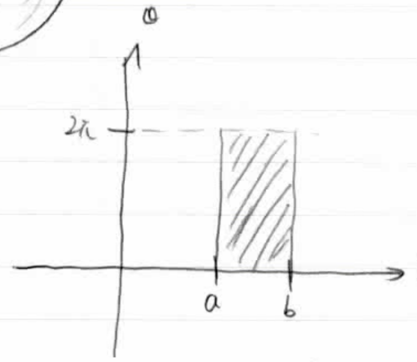
$\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dxdy$ を求める.



解答

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とし,

$\Omega=\{(r,\theta) \mid a \leqq r \leqq b,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\}$ とする.



$$\iint_D \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_\Omega \frac{r^2\cos^2\theta}{r^2}\cdot r\,drd\theta$$
$$= \iint_\Omega r\cos^2\theta\,drd\theta$$
$$= \int_a^b \left(\int_0^{2\pi} r\cos^2\theta\,d\theta\right) dr$$
$$= \left(\int_a^b r\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta\right)$$
$$= \frac{b^2-a^2}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \frac{\pi(b^2-a^2)}{2}$$

例（線型変換）

$a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $ad-bc \neq 0$ とする.

$(x,y)=\Phi(u,v)=(au+bv,\ cu+dv)$ とする。

$\mathbb{R}^2$での線型変換

ヤコビアンは $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$ に対して

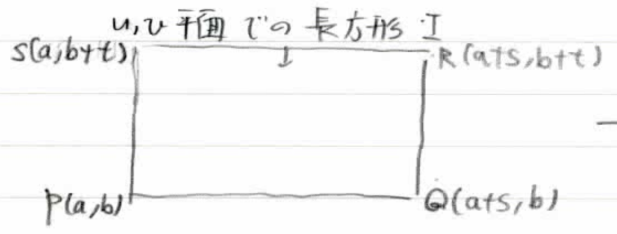
$$J_\Phi(u,v)=\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underbrace{ad-bc}_{\text{定数}} \neq 0$$

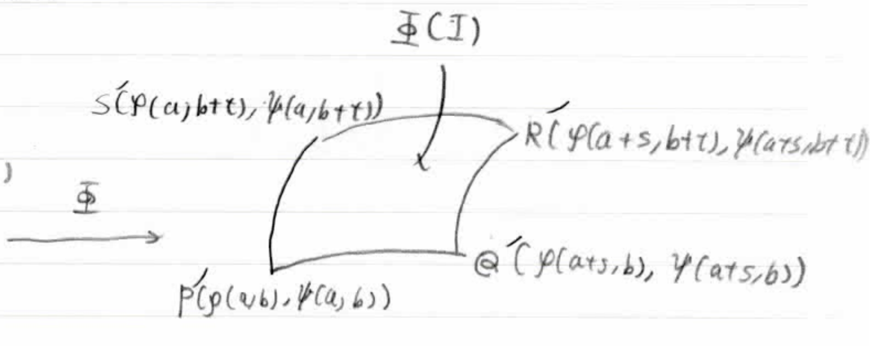
・$D, \Omega \subset \mathbb{R}^2$ は面積確定な有界閉領域で $D=\Phi(\Omega)$ であるとする。
$f(x,y)$ を D 上の連続関数とすると,

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = |ad-bc|\iint_\Omega f(au+bv,\ cu+dv)\,dudv$$

ヤコビアンの直観的な意味.

$|s|, |t|$ 十分小とする.





$|\Phi(I)| \fallingdotseq |$四角形 $P'Q'R'S'|$

$\fallingdotseq |\overrightarrow{P'Q'}$ と $\overrightarrow{P'S'}$ で作られる平行四辺形$|$

$= |\overrightarrow{P'Q'} \times \overrightarrow{P'S'}|$

$$= \left| \begin{pmatrix} \varphi(a+s,b) - \varphi(a,b) \\ \psi(a+s,b) - \psi(a,b) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \varphi(a,b+t) - \varphi(a,b) \\ \psi(a,b+t) - \psi(a,b) \\ 0 \end{pmatrix} \right|$$

$\varphi(a+s,b) - \varphi(a,b) \fallingdotseq \varphi_u(a,b)s$

$\varphi(a,b+t) - \varphi(a,b) \fallingdotseq \varphi_u(a,b)t$

ψについても同様で

$$\fallingdotseq \left| \begin{pmatrix} \varphi_u(a,b)s \\ \psi_u(a,b)s \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \varphi_v(a,b)t \\ \psi_v(a,b)t \\ 0 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \det \begin{pmatrix} \varphi_u(a,b) & \varphi_v(a,b) \\ \psi_u(a,b) & \psi_v(a,b) \end{pmatrix} \right| |s||t| = |J_\Phi(a,b)||I|$$

$dudv$

n重積分に対しても同様の変数変換公式が成立する.

例えば3重積分では C^1級の変数変換

$(x,y,z) = \Phi(u,v,w)$ に対して定理5.11で $\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^3$ に、面積確定を体積確定に

ヤコビアンを

$$J_\Phi(u,v,w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$ に変更して

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_\Omega f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) |J_\Phi(u,v,w)|$$

$dudvdw$

が成立。

(fはD上の連続関数)

例 (3次元空間 極座標変換)

変数変換

$(x,y,z) = \Phi(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$

を考える.

$A = [0,\infty) \times [0,\pi] \times [0,2\pi]$

$= \{(r,\theta,\varphi) \mid r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi\}$

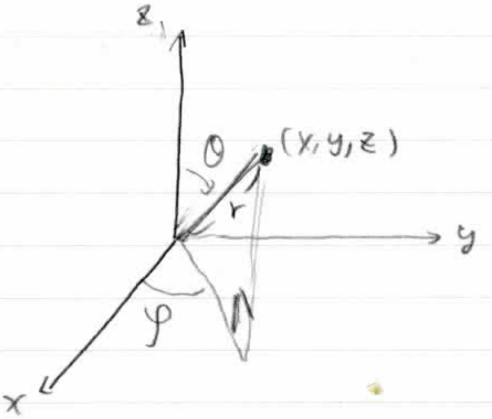
で考える.

$\Phi(A) = \mathbb{R}^3$ である.

ヤコビアン

$$J_\Phi(r,\theta,\varphi) = \det\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} = r^2\sin\theta$$

↑覚える



例

3次元球 $B=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le a^2\}$ $(a>0)$ とすると、

$$(B) = \iiint_B 1\,dxdydz \underset{\uparrow}{=} \iiint_\Omega 1\cdot r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi = \frac{4}{3}\pi a^3$$

空間極座標変換

$$\Omega = \{(r,\theta,\varphi)\mid 0\le r\le a,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$$

5.4 多変数関数の広義積分

(a) Dが有界で、必ずしも有界でないとき
(b) $f(x,y)$ がDで 〃
} にも"積分"を考えたい。

簡単のため、連続関数に対して考える。

(b)のような例として

$D=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2\le 1\}$　$f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$　$f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

$D\subset\mathbb{R}^2$ とする（Dは必ずしも有界ではない）

$\mathbb{R}^2$ の部分集合の列 $\{D_n\}$ が D の近似列（又は近似増加列）であるとは以下が成り立つことを言う。

(i) 各 D_n は面積確定な有界閉集合である。$(n=1,2,\cdots)$

(ii) $\forall n\in\mathbb{N}$ に対して $D_n\subset D_{n+1}$ かつ $D_n\subset D$

（つまり $D_1\subset D_2\subset D_3\ \cdots\cdots\subset D_n\subset D$）

(iii) $A \subset D$ となる任意の有界閉集合 A に対して
$\exists m \in \mathbb{N}$ s.t. $A \subset D_m$

(ii) (iii) より

$$D = \{(x,y) \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } (x,y) \in D_n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$$

(復習)

$\mathbb{R}^2$の集合の列$\{D_n\}$が$D \subset \mathbb{R}^2$の近似列であるとは

(i) 各D_nが面積確定な有界閉集合.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $D_n \subset D_{n+1}$, $D_n \subset D$

(iii) $A \subset D$ となる任意の有界閉集合 A に対して, $\exists m \in \mathbb{N}$ s.t. $A \subset D_m$

近似列の例

(1) $D_n = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq n^2\}$ とすると, $\{D_n\}$ は $\mathbb{R}^2$の近似列

(2) $D_n = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq \left(1-\frac{1}{n}\right)^2\}$ とすると

$\{D_n\}$ は $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1\}$ の近似列.

定義

$D \subset \mathbb{R}^2$ は近似列をもつとする.

$f(x,y)$ を D 上の連続関数とする.

D の任意の近似列$\{D_n\}$に対して, 極限値

$$I = \lim_{n \to \infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$$

が存在し, この値が近似列$\{D_n\}$のとり方によらずに同一の値になるとき,
$f(x,y)$ は Dで広義積分可能であるという.
このとき, 極限値Iを$f(x,y)$のDにおける広義積分(又は広義重積分)
といい,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

と表す.

定理 5.12

$D \subset \mathbb{R}^2$ は近似列をもつとする.
$f(x,y)$ は D 上の連続関数で,
「$\forall (x,y) \in D$, $f(x,y) \geqq 0$」又は,「$\forall (x,y) \in D$, $f(x,y) \leqq 0$」であるとする.
このときDのある近似列$\{D_n\}$に対して

極限 $\lim_{n \to \infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$

が存在するならば、$f(x,y)$ は D で広義積分可能で、

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy$$

が成り立つ。

証明

$f(x,y) \geqq 0$ （$(x,y)\in D$）のときに示す。

$I_n = \iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy$ ，$I = \lim_{n\to\infty} I_n$ とする。

このとき、$I_1 \leqq I_2 \leqq I_3 \leqq \cdots\cdots \leqq I_n \leqq \cdots \leqq I$

D の他の近似列 $\{E_n\}$ を任意にとる。

$J_n = \iint_{E_n} f(x,y)\,dxdy$ とする。

$\{J_n\}$ は増加列である（$f(x) \geqq 0$，$E_1 \subset E_2 \subset \cdots\cdots$）

☆ 各有界閉集合 E_n に対して、$\exists m \in \mathbb{N}$ s.t. $E_n \subset D_m \subset D$
（∵ $\{D_n\}$ が D の近似列だから（iii））
∴ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists m \in \mathbb{N}$ s.t. $J_n \leqq I_m \leqq I$ … ①

$\{J_n\}$ は上に有界な増加列となり、収束する。

$J = \lim_{n\to\infty} J_n$ とすると、① で $n\to\infty$ として、$J \leqq I$ … ②

☆ で $\{D_n\}$ と $\{E_n\}$ を入れ替えて議論すると、
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists m \in \mathbb{N}$ s.t. $I_n \leqq J_m \leqq J$
$n\to\infty$ とすると、$I \leqq J$ … ③

②，③ より、$I = J$

従って $f(x,y)$ は D で広義積分可能で、

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = I$$

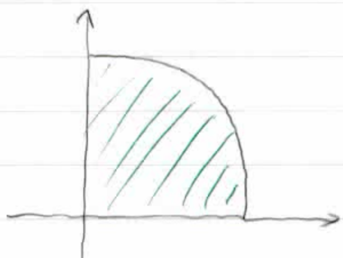
例

(1) $D = \{(x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ とするとき、

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \frac{\pi}{4}$$

(2) $\int_0^\infty e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ← 1変数の広義積分

(1) $D_n = \{(x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq n^2\}$ とすると、
D_n は D の近似列



$e^{-x^2-y^2} > 0$ なので、定理 5.12 より、

$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}dxdy$ を求めればよい.

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$,

$\Omega_n=\{(r,\theta)\mid 0\leqq r\leqq n,\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\}$ とする.

$$\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}dxdy=\iint_{\Omega_n} e^{-r^2}\underbrace{r}_{\text{ヤコビアン}}drd\theta$$

$$=\int_0^n\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} re^{-r^2}d\theta\right)dr$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^n re^{-r^2}dr=\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^n=\frac{\pi}{4}(1-e^{-n^2})$$

$$\to\frac{\pi}{4}\quad(n\to\infty)$$

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy=\frac{\pi}{4}$$

(2) 1変数広義積分 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ は収束する.

($\because$ $x\geqq1$ のとき, $0\leqq e^{-x^2}\leqq e^{-x}$ で $\int_1^\infty e^{-x}dx=e^{-1}$ (収束))

$$\therefore \int_0^\infty e^{-x^2}dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-x^2}dx\ \cdots ①$$

$K_n=\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq n,\ 0\leqq y\leqq n\}$ とする.

$\{K_n\}$ は D の近似列

$$\iint_{K_n} e^{-x^2-y^2}dxdy=\int_0^n\left(\int_0^n e^{-x^2-y^2}dy\right)dx=\left(\int_0^n e^{-x^2}dx\right)^2\cdots ②$$

①, ② より,

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\left(\lim_{n\to\infty}\iint_{K_n} e^{-x^2-y^2}dxdy\right)^{\frac{1}{2}}\cdots ③$$

$\{K_n\}$ は D の近似列, $e^{-x^2-y^2}>0$ なので, (1) より,

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{K_n} e^{-x^2-y^2}dxdy=\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy=\frac{\pi}{4}$$

③ より, $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

例

$D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x^2+y^2 \leqq 1\}$ $p > 0$ とする.

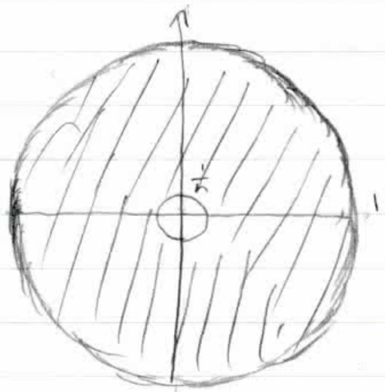
広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{p}{2}}}\,dxdy$ が収束する. $\Longleftrightarrow p < 2$

証明

$f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{p}{2}}}$ とする.

$p > 0$ のとき、$f(x,y)$ は D 上で連続だが、非有界

(特に、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \infty$)



$D_n = \left\{(x,y) \mid \dfrac{1}{n^2} \leqq x^2+y^2 \leqq 1\right\}$ とする.

$\{D_n\}$ は D の近似式

$f(x,y) \geqq 0$ なので $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy \Longleftrightarrow p < 2$ ⋯ (＊)

を示せばよい.

$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$

$\Omega_n = \left\{(r,\theta) \mid \dfrac{1}{n} \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\right\}$ とする.

$$\iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{p}{2}}}\,dxdy = \iint_{\Omega_n} \frac{1}{r^p}\cdot r\,drd\theta$$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\int_0^{2\pi} r^{1-p}\,d\theta\right)dr = 2\pi\int_{\frac{1}{n}}^{1} r^{1-p}\,dr \quad \cdots ①$$

・$p \neq 2$ のとき、

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} r^{1-p}\,dr = \left[\frac{1}{2-p}r^{2-p}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} = \frac{1}{2-p}\left\{1-\left(\frac{1}{n}\right)^{2-p}\right\}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2-p} & (p < 2 \text{ のとき}) \\ \infty & (p > 2 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (n \to \infty)$$

・$p = 2$ のとき、

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} r^{-1}\,dr = \left[\log r\right]_{\frac{1}{n}}^{1} = \log n \longrightarrow \infty \quad (n\to\infty)$$

これらと①より、(＊) が従う.

例

$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqq 1\}$ とする。

広義積分 $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{p}{2}}}\,dxdy$ が収束する。$\Longleftrightarrow p>2$

(同様、各自で。$D_n=\{(x,y)\mid 1\leqq x^2+y^2\leqq n^2\}$ とすればよい。)

定理 5.13

$D\subset\mathbb{R}^2$ は近似列をもつとし、$f(x,y)$ を D 上の連続関数とする。このとき、

(A) $f(x,y)$ は D 上広義積分可能

$\Longleftrightarrow$ (B) $|f(x,y)|$ は D 上広義積分可能

(A)、(B) のいずれかが成り立つとき、

$$\left|\iint_D f(x,y)\,dxdy\right|\leqq\iint_D |f(x,y)|\,dxdy<\infty$$

注意

多変数の広義積分では収束と絶対収束が同値

1変数：収束するが絶対収束しない広義積分があった。

定理 5.14

$D\subset\mathbb{R}^2$ とし、D は近似列をもつとする。

$f(x,y)$ を D 上の連続関数とする。

以下を満たす D 上の非負の連続関数 $g(x,y)$ が存在するとする。

(i) $\forall(x,y)\in D,\quad |f(x,y)|\leqq g(x,y)$

(ii) $g(x,y)$ は D 上広義積分可能。

このとき、$f(x,y)$ は D 上で広義積分可能で、

$$\iint_D |f(x,y)|\,dxdy\leqq\iint_D g(x,y)\,dxdy$$

証明

D の近似列 $\{D_n\}$ を任意にとる。

(i)、(ii)、$g\geqq 0$、$D_n\subset D\ (\forall n\in\mathbb{N})$ より、

$$\iint_{D_n}|f(x,y)|\,dxdy\leqq\iint_{D_n}g(x,y)\,dxdy\leqq\iint_D g(x,y)\,dxdy<\infty\quad\cdots ①$$

① と、$D_1\subset D_2\subset\cdots$ と $|f|>0$ より、

上に有界な増加列となり、収束する。

$|f(x,y)|$ は D で広義積分可能で、D で $n\to\infty$ として、

$$\iint_D |f(x,y)|\,dxdy\leqq\iint_D g(x,y)\,dxdy$$