5 多変数関数の積分

5.1 重積分

$\mathbb{R}^2$において
$K=[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\mid a\leqq x\leqq b, c\leqq y\leqq d\}$
の形で表される集合を
長方形，長方形集合，矩形＝二次元区間 という。

㊥長方形上の多重積分

定義

$f(x,y)$を長方形

$K=[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\mid a\leqq x\leqq b,\ c\leqq y\leqq d\}$

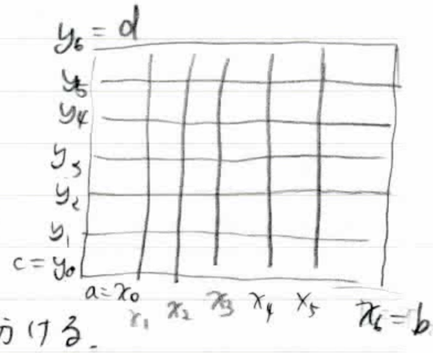
上の有界関数とする.

長方形Kの分割

Δ: $a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b \quad c=y_0<y_1<\cdots<y_n=d$

を考える.

つまり、Kを長方形 $K_{jk}=[x_{j-1},x_j]\times[y_{k-1},y_k]$に分ける.



$$|\Delta|=\max_{\substack{1\leqq j\leqq m\\ 1\leqq k\leqq n}}\sqrt{(x_j-x_{j-1})^2+(y_k-y_{k-1})^2}$$ とする.

$|\Delta|$を分割Δの大きさという.

各小長方形から代表点P_{jk}を任意にとり

$$R[f,\Delta,\{P_{jk}\}]=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}f(P_{jk})(x_j-x_{j-1})(y_k-y_{k-1})$$

を、分割Δ，代表点$\{P_{jk}\}$に関するfのリーマン和という.
$|\Delta|\to 0$のとき$\{P_{jk}\}$のとり方によらずに$R[f,\Delta,\{P_{jk}\}]$が定数αに限りなく近づくとき、$f(x,y)$はKでリーマン積分可能（積分可能，可積分）であるという. (*)

(*)は以下を意味する.

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ s.t. $|\Delta|<\delta$となる任意の分割Δと代表点P_{jk}に対して

$|R[f,\Delta,\{P_{jk}\}]-\alpha|<\varepsilon$

この極限αを

$$\iint_K f(x,y)\,dxdy$$

と書き、$f(x,y)$のKでの2重積分という。

長方形上の積分可能条件

$M_{jk}=M_{jk}[f]=\sup_{(x,y)\in K_{jk}}f(x,y) \qquad m_{jk}=m_{jk}[f]=\inf_{(x,y)\in K_{jk}}f(x,y)$ とする.

$$S_\Delta=S_\Delta[f]=\sum_{j,k}M_{jk}[f](x_j-x_{j-1})(y_k-y_{k-1})$$

$$s_\Delta=s_\Delta[f]=\sum_{j,k}m_{jk}[f](x_j-x_{j-1})(y_k-y_{k-1})$$

とする。

$S_\Delta[f]$ を K の分割 Δ に対する f の過剰和 ⎫
$s_\Delta[f]$ を K の分割 Δ に対する f の不足和 ⎭ という。

$S = S[f] = \inf_\Delta S_\Delta[f]$, $s = s[f] = \sup_\Delta s_\Delta[f]$ とする。

このとき、$s[f] \leqq S[f]$ が成立。(K上の有界関数fについて)

$S[f]$ を f の長方形Kでの上積分 ⎫
$s[f]$ を 〃 下積分 ⎭ という。

定理 5.1 (ダルブーの定理)

fを長方形K上の有界関数とする。

$|\Delta| \to 0$ のとき、$S_\Delta[f] \to S[f]$ $s_\Delta[f] \to s[f]$

定理 5.2

$f(x,y)$ を長方形K上の有界関数とする。

(A) fが K上リーマン積分可能

$\Longleftrightarrow$ (B) $S[f] = s[f]$

$\Longleftrightarrow$ (C) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \Delta$ 分割 s.t. $S_\Delta[f] - s_\Delta[f] < \varepsilon$

(A)〜(C)のいずれかが成り立つとき

$$\iint_K f(x,y)\,dx\,dy = S[f] = s[f]$$

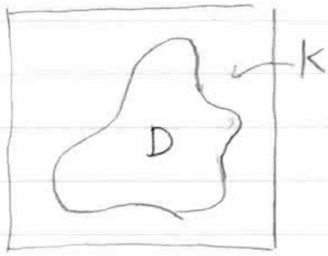
定理 5.3

長方形K上の連続関数 $f(x,y)$ は可積分である。

☆ 有界集合上の2重積分と面積

定義

$D \subset \mathbb{R}^2$ を有界集合とし、$f(x,y)$ を D上の有界関数とする。



$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D \end{cases}$$ とする。

($\tilde{f}$ は $\mathbb{R}^2$ 上有界)

$D \subset K$ となるある長方形Kで $\tilde{f}(x,y)$ が可積分であるとき、

$f(x,y)$ は Dで可積分であるといい、

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy$$

と書く。これを f の Dでの 2重積分という。

注意

この定義で、fの可積分性で $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ の値は長方形Kのとり方に依らない。

$\mathbb{R}^n$の有界集合Dに対しても同様に<u>n重積分</u>

$$\int\!\!\int_D f(x_1, \cdots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

が定義される。

$$\iiint_D f(x,y,z)\, dx dy dz$$

定理 5.4

$D \subset \mathbb{R}^2$を有界とし、$f(x,y)$と$g(x,y)$はD上可積分とする。

(1) α, βを定数とするとき、

$\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)$, $f(x,y) g(x,y)$, $|f(x,y)|$ はD上可積分で

$$\iint_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\, dx dy = \alpha \iint_D f(x,y)\, dx dy + \beta \iint_D g(x,y)\, dx dy$$

(線型性)

(2) $f(x,y) \leqq g(x,y)$ $(\forall (x,y) \in D)$ ならば

$$\iint_D f(x,y)\, dx dy \leqq \iint_D g(x,y)\, dx dy$$

定義

$D \subset \mathbb{R}^2$を有界集合とする。

D上の定数関数 $f(x,y) = 1$ がDで可積分であるとき、

Dは<u>面積確定</u>であるといい、

$$|D| = \iint_D 1\, dx dy$$

をDの<u>面積</u>という。

$A \subset \mathbb{R}^2$に対して、

カイ chi → $\chi_A(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in A \\ 0 & (x,y) \notin A \end{cases}$

とする。χ_AをAの<u>定数関数</u>という。

例

長方形 $K = [a,b] \times [c,d]$ は面積確定で

$$|K| = (b-a)(c-d)$$

(他の面積確定集合の例は後)

注意

$D \subset \mathbb{R}^2$を有界とする。

・Dが面積確定

$\Longleftrightarrow$ ・χ_D が $D \subset K$ となる長方形Kで可積分

$|D| = \iint_K \chi_D(x,y)\,dxdy$ である。

命題

D_1, D_2 が面積確定

$\Rightarrow D_1 \cap D_2$, $D_1 \cup D_2$, $D_1 \setminus D_2$ も面積確定

$\chi_{D_1 D_2} = \chi_{D_1}\chi_{D_2}$ $\chi_{D_1 D_2} = \chi_{D_1} + \chi_{D_2} - \chi_{D_1 D_2}$ $\chi_{D_1 D_2} = \chi_{D_1} - \chi_{D_1 D_2}$

定理 5.5

$A \subset \mathbb{R}^2$を有界集合とする。

(a) Aが面積確定で $|A| = 0$

$\Longleftrightarrow$ (b) $^\forall \varepsilon > 0$ に対して有限個の長方形 $J_1, \cdots, J_n$ が存在して、

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} J_k \qquad \sum_{k=1}^{n} |J_k| < \varepsilon$$

このとき A は面積0の集合であるという。

定理 5.6

$D \subset \mathbb{R}^2$を有界とする。

Dが面積確定 $\Longleftrightarrow$ Dの境界∂Dの面積が0

定理 5.7

面積確定集合D上の有界連続関数$f(x,y)$はDで可積分である。

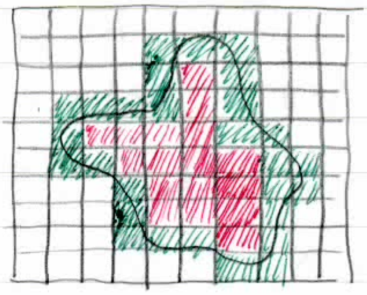
証明

$D \subset K$ となる長方形Kをとる。

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$ がKで可積分であることを示す。

fがDで有界なので、$\exists L>0$ s.t. $\forall (x,y)\in K$

$$|f(x,y)| \leqq L$$



Kの分割Δの小長方形のうち

- Dに含まれる長方形を $K_1, \cdots, K_M$
- Dの点を少なくとも1つ含む（Dと共有点をもつ）小長方形を $K_1, \cdots, K_M, K_{M+1}, \cdots K_N$ とする。

$(M \leqq N)$

$M_j = \sup_{(x,y)\in K_j} f(x,y)$　　$m_j = \inf_{(x,y)\in K_j} f(x,y)$ とする。

$$S_\Delta[f] - s_\Delta[f] = \sum_{j=1}^{N}(M_j - m_j)|K_j|$$

$$= \sum_{j=1}^{M}(M_j - m_j)|K_j| + \sum_{j=M+1}^{N}(M_j - m_j)|K_j| \cdots ①$$

$\varepsilon > 0$ を任意にとる。

(i) <u>①の第2項</u>

Dが面積確定なので χ_D がK上可積分

$\exists \delta > 0$ s.t. $|\Delta| < \delta$ ならば

$$\sum_{j=M+1}^{N}|K_j| = S_\Delta[\chi_D] - s_\Delta[\chi_D] < \frac{\varepsilon}{4L}$$

$|\Delta| < \delta$ のとき、

$$|①の第2項| \leqq 2L\sum_{j=M+1}^{N}|K_j| < 2L \times \frac{\varepsilon}{4L} = \frac{\varepsilon}{2} \cdots ②$$

(ii) <u>①の第1項</u>

$E = \bigcup_{j=1}^{M} K_j$ とすると、Eは有界閉集合なので fはEで一様連続、

$\exists \delta' > 0$ s.t. 「$|P, P'| < \delta' \Rightarrow |f(P) - f(P')| < \dfrac{\varepsilon}{2|K|}$」

$|\Delta| < \delta'$ となる分割Δを任意にとる。

$j = 1, \cdots, M$ のとき、$Q, Q' \in K_j$ ならば $|QQ'| \leqq |\Delta| < \delta'$ なので

$$|f(Q) - f(Q')| < \frac{\varepsilon}{2|K|}$$

$$M_j - m_j < \frac{\varepsilon}{2|K|}$$

K_jで最大　最小

$|①の第1項| \leqq \sum_{j=1}^{M} \frac{\varepsilon}{2|K|}|K_j| = \frac{\varepsilon}{2|K|}\sum_{j=1}^{M}|K_j| < \frac{\varepsilon}{2}$

①,②,③より $|\Delta| < \min\{\delta, \delta'\}$ ならば

$$S_\Delta[\tilde{f}] - s_\Delta[\tilde{f}] < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

∴ $\tilde{f}$ は K上可積分

∴ f は D上可積分

定理 5.8

(1) $A \subset \mathbb{R}^2$ の面積が 0 ならば、A上の任意の有理関数 $f(x,y)$ はA上可積分で

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = 0$$

(2) $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^2$ を面積確定とし、$D_1 \cap D_2$ の面積が 0 であるとする。
$f(x,y)$ が D_1 と D_2 で可積分ならば、$f(x,y)$ は $D_1 \cup D_2$ でも可積分で

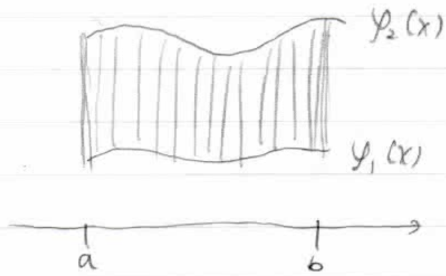
$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$$

面積確定集合の例

例 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ は閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数で

$$\varphi_1(x) \leqq \varphi_2(x) \quad (\forall x \in [a,b])$$

であるとする。



有界閉領域

$$D = \{(x,y) \mid a \leqq x \leqq b \quad \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\}$$

は面積確定である。

このように表される集合を縦線集合という。

これを示すには ∂D の面積が 0 であることを示せばよい。(定理 5.6)

次を示せば十分。

補題

$[a,b]$ 上の連続関数 $\varphi(x)$ に対して $y=\varphi(x)$ のグラフ

$$A = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in [a,b]\}$$

の面積が 0 である。

(復習(定理 5.5))

・Aの面積が 0

$\Longleftrightarrow$ ・$\forall \varepsilon > 0$, 有限個の長方形 $J_1, \cdots, J_n$ が存在して

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} J_k \qquad \sum_{k=1}^{n} |J_k| < \varepsilon$$

補題の証明

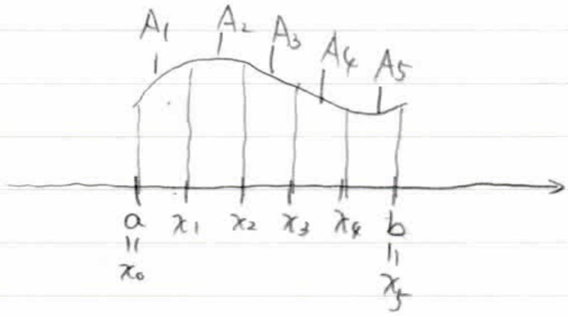
$[a,b]$ を n 等分する。

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

$x_k = a + \dfrac{b-a}{n} k \quad (k=1,\cdots,n)$ とする。

$A_k = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ とする。

このとき $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$



(各 A_n について考える)

$\varepsilon > 0$ を任意にとる。

φ は $[a,b]$ で一様連続なので、

$\exists \delta > 0$ s.t.

「$x, x' \in [a,b]$, $|x - x'| < \delta \Longrightarrow |\varphi(x) - \varphi(x')| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$」

n を $\dfrac{b-a}{n} < \delta$ となるように大きくとると、

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (\forall x, x' \in [x_{k-1}, x_k])$$

従って、ある長方形 J_k が存在して、

$$A_k \subset J_k \qquad |J_k| = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \times \frac{b-a}{n} = \frac{\varepsilon}{2n}$$

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{n} J_k,$$

$$\sum_{k=1}^{n} |J_k| < \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2n} = \frac{\varepsilon}{2n} \times n = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

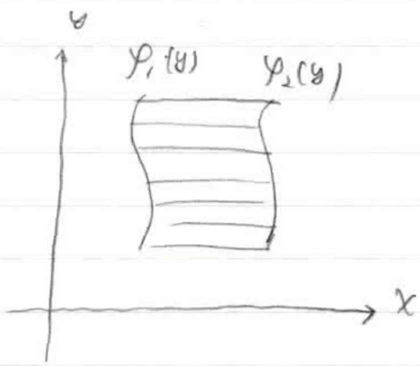
例

同様に横線集合

$D = \{(x,y) \mid c \leq y \leq d;\ \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\}$ とする。

ここで、$\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ は $[c,d]$ 上連続で $\varphi_1 \leq \varphi_2$

このとき有界閉領域 D は面積確定である。



例

有限個の C^1 級曲線で囲まれた有界閉領域は面積確定である。

((復習) C^1 級曲線：$[a,b]$ 上の C^1 級関数 $x(t), y(t)$ を用いて、
$C = \{(x(t), y(t)) \mid t \in [a,b]\}$ と表される集合)

例えば、円板 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq a^2\}$ $(a>0)$ は面積確定

$\partial D=\{(x,y)\mid x^2+y^2=a^2\}=\{(a\cos t, a\sin t)\mid t\in[0,2\pi]\}$ ← C^1級曲線

これを示すには、以下を示せばよい。

補題

C^1級関数 $C=\{(x(t),y(t))\mid t\in[a,b]\}$ が面積0の集合である。

注意

面積確定でない有界閉領域の存在が知られている。

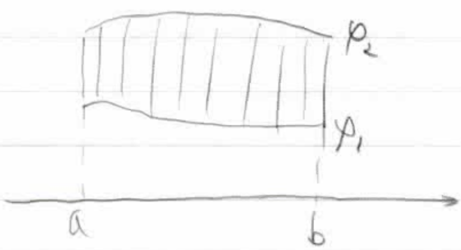
5.2 累次積分

定理5.9

$\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で連続で、$\varphi_1(x)\leq\varphi_2(x)$ $\forall x\in[a,b]$ であるとする。
2変数関数 $f(x,y)$ は縦線集合

$$D=\{(x,y)\mid a\leq x\leq b,\ \varphi_1(x)\leq y\leq\varphi_2(x)\}$$

で連続とする。



このとき、(xの)1変数関数

$F(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,dy$ は $[a,b]$ で連続で

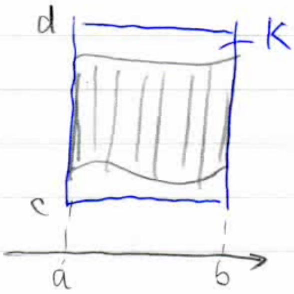
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,dy\right)dx \cdots\cdots (*)$$

$(*)$ の右辺のように1変数の積分をくり返す積分を累次積分という。

$(*)$ の右辺を $\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,dy$ と書くことがある。

定理(5.9)$(*)$の証明

$F(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,dy$ の連続性は認める。



$D\subset K$ となる長方形 $K=[a,b]\times[c,d]$ をとる。Kの分割

$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots\cdots<x_n=b$ $c=y_0<\cdots\cdots<y_n=d$

をとり、分割 Δ による小長方形, $K_{jk}=[x_{j-1},x_j]\times[y_{k-1},y_k]$ とおく。

$$\tilde{f}(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & (x,y)\in D \\ 0 & (x,y)\subset K\setminus D\end{cases}$$

$M_{jk}=\sup_{(x,y)\in K_{jk}}\tilde{f}(x,y)$ $m_{jk}=\inf_{(x,y)\in K_{jk}}\tilde{f}(x,y)$ とする。

$x_{j-1} \leqq x \leqq x_j$ のとき、

$$m_{jk}(y_k - y_{k-1}) \leqq \int_{y_{k-1}}^{y_k} \tilde{f}(x,y)\,dy \leqq M_{jk}(y_k - y_{k-1})$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_{jk}(y_k - y_{k-1}) \leqq \int_c^d \tilde{f}(x,y)\,dy \leqq \sum_{k=1}^{n} M_{jk}(y_k - y_{k-1})$$

xについて$[x_{j-1}, x_j]$上で積分して、

$$\sum_{k=1}^{n} m_{jk}(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}) \leqq \int_{x_{j-1}}^{x_j} F(x)\,dx \leqq \sum_{k=1}^{n}(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1})$$

jについて和をとると、

$\tilde{f}$の不足和 → $s_\Delta[\tilde{f}] \leqq \int_a^b F(x)\,dx \leqq S_\Delta[\tilde{f}]$ ← 過剰和

$|\Delta| \to 0$とすると、 $s[\tilde{f}] \leqq \int_a^b F(x)\,dx \leqq S[\tilde{f}]$ …… Ⓐ

下積分 上積分

一方、$\tilde{f}(x,y)$はKで可積分なので、

$$S[\tilde{f}] = s[\tilde{f}] = \iint_K \tilde{f}(x,y)\,dxdy = \iint_D f(x,y)\,dxdy \quad \cdots \text{Ⓑ}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

注意

横線集合でも同様

$\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$は閉区間$[c,d]$で連続で、$\varphi_1(y) \leqq \varphi_2(y)$ $\forall y \in [c,d]$

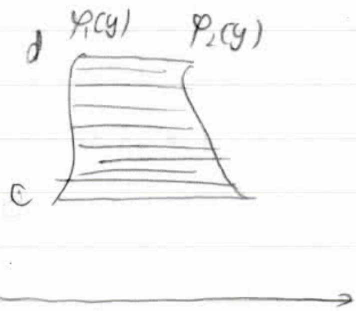
であるとする。

2変数関数 $f(x,y)$は横線集合

$D = \{(x,y) \mid c \leqq y \leqq d \quad \varphi_1(y) \leqq x \leqq \varphi_2(y)\}$

で連続とする。

$\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx$ は$[c,d]$上連続で、



$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

系

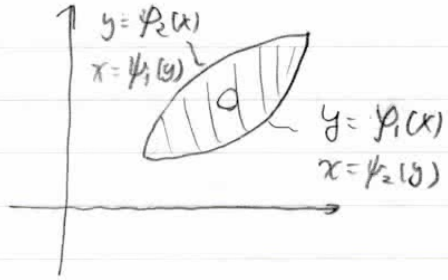
$D \subset \mathbb{R}^2$が

$$D = \{(x,y) \mid \underbrace{a \leqq x \leqq b,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)}_{\text{縦線}}\} = \{(x,y) \mid \underbrace{c \leqq y \leqq d,\ \varphi_1(y) \leqq x \leqq \varphi_2(y)}_{\text{横線}}\}$$

連続　連続

と表されるとする

このとき、D上の連続関数 $f(x,y)$ に対して、



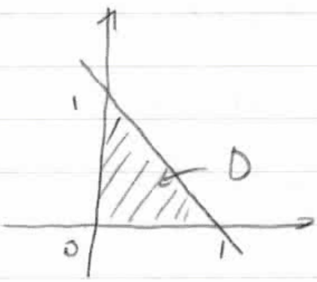
$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$
$$= \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$
$$= \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

（積分順序の交換）

例

$D = \{(x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1\}$

$I = \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$ を求める。



解答

$D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1-x\}$ なので

$$I = \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x^2+y^2)\,dy \right) dx$$
$$= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1 \left\{ x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} \right\} dx = \frac{1}{6}$$

例

縦線集合 $D = \{(x,y) \mid a \leqq x \leqq b,\ g(x) \leqq y \leqq h(x)\}$ （g, h は連続、$g \leqq h$）

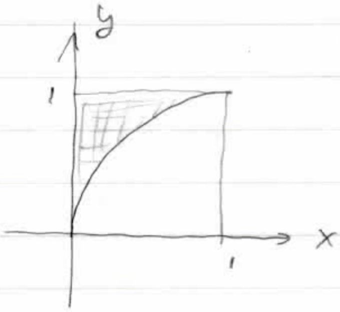
の面積Dは、

$$|D| = \iint_D 1\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} 1\,dy \right) dx = \int_a^b (h(x)-g(x))\,dx$$

例

$f(x,y)$ を $[0,1]\times[0,1]$ 上の連続関数とするとき、

$\int_0^1 \left(\int_0^{y^2} f(x,y)\,dx \right) dy$ の積分順序の交換



解）$D = \{(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq y^2\}$ ← 横

$= \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ \sqrt{x} \leqq y \leqq 1\}$ ← 縦

$$\int_0^1 \left(\int_0^{y^2} f(x,y)\,dx \right) dy = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,dy \right) dx$$