(2) 置換積分　f を $[c,d]$ 上の連続関数

φ は $[\alpha,\beta]$ 上の C^1 級関数で

$\forall t \in [\alpha,\beta]$ に対して，$c \leqq \varphi(t) \leqq d$ をみたすとする。

$a=\varphi(\alpha)$，$b=\varphi(\beta)$ とおく。

（このとき，$a, b \in [c,d]$ に注意する）

次が成立。

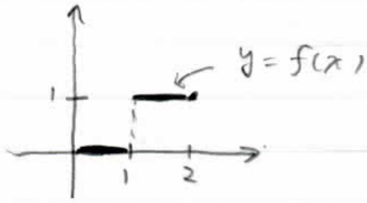
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

証明　(1) 積の微分の公式と微分積分学の基本定理 } から従う。
(2) 合成関数の微分の公式と　　〃

10/20

注意　f が $[a,b]$ で連続でなければ定理4.11や定理4.12は必ずしも成りたつとは限らない。

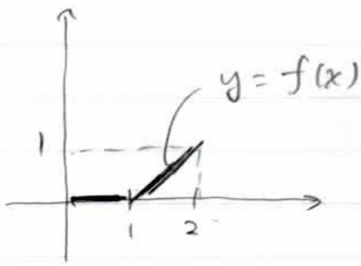
例えば，
$$f(x)=\begin{cases}0 & 0\leqq x\leqq 1\\ 1 & 1<x\leqq 2\end{cases}$$
とする。



$f(x)$ は $x=1$ で不連続

・$f(x)$ には $[0,2]$ で原始関数は存在しない。

・$[0,2]$ 上の関数
$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\begin{cases}0 & (0\leqq x\leqq 1)\\ x-1 & (1<x\leqq 2)\end{cases}$$
$g(x)$ は $x=1$ で微分可能でない。



4.3 原始関数の計算

基本的な関数の原始関数 ← プリント

命題

(1) 部分積分　f, g，C^1 級とすると
$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

(2) 置換積分　$f(x)$ が連続，$x=\varphi(t)$ が C^1 級で $f(\varphi(t))$ で定義されているとすると，
$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

有理関数

2つの多項式 $P(x)$, $Q(x)$ を用いて

$f(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ と表される関数を有理関数(又は分数関数)という。

例
$$\int \frac{1}{x^3+1}dx = \int \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}dx = \int \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{-x+2}{x^2-x+1}\right)dx$$
$$= \frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2-x+1}dx$$
$$= \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}dx$$
$$= \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

三角関数の有理式

$f(X, Y)$ を X, Y の有理式とし、

$\int f(\cos x, \sin x)dx$ を考える。

$t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおく。

$x = 2\tan^{-1}t$ $\qquad \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2}{t^2+1}$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2} = 2\cdot\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\tan\frac{x}{2} = \frac{2t}{t^2+1}$$
$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\int f(\cos x, \sin x)dx$$
$$= \int \underbrace{f\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{t^2+1}}_{t\text{の有理式}}dt$$

有理関数の原始関数に帰着できた。

$$\int\frac{1}{1+\sin x}dx = \int\frac{\cancel{1+t^2}}{t^2+2t+1}\cdot\frac{2}{\cancel{t^2+1}}dx = \int\frac{2}{(t+1)^2}dx = 2(-1)\cdot\frac{1}{t+1} = -\frac{2}{t+1}$$
$$= -\frac{2}{\tan\frac{x}{2}+1}$$

無理関数の有理式

$f(x, y)$ を x, y の有理式とし、

$\int f(x, \sqrt{x^2+ax+b})\,dx$ を考える。

$t = x + \sqrt{x^2+ax+b}$ とおく。

$t - x = \sqrt{x^2+ax+b}$ $\qquad (t-x)^2 = x^2+ax+b$

$$x = \frac{t^2-b}{2t+a} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{2(t^2+at+b)}{(2t+a)^2}$$

$$\sqrt{x^2+ax+b} = t - x = t - \frac{t^2-b}{2t+a} = \frac{t^2+at+b}{2t+a}$$

$$\int f(x, \sqrt{x^2+ax+b})\,dx = \int \underbrace{f\left(\frac{t^2-b}{2t+a}, \frac{t^2+at+b}{2t+a}\right) \cdot \frac{2(t^2+at+b)}{(2t+a)^2}}_{t\text{の有理式}}\,dt$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$$

4.4 広義積分（1変数）

（通常の定積分は閉区間上の有理関数に限定して考えていた）

$\left\{\begin{array}{l}\text{・非有理関数に対する“積分”} \\ \text{・無限区間での“積分”}\end{array}\right.$ を考える。

（以下では簡単のため連続関数に対して広義積分を考える。）

有理区間での非有界、関数の広義積分

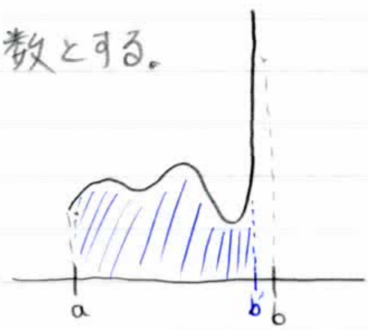
$a, b \in \mathbb{R}$ $\quad a < b$ とする。

(i) f を区間 $[a, b)$ 上の非有界な連続関数とする。

（このとき f は $x = b$ の近くで非有界）

$\forall b' \in (a, b)$ に対して f は閉区間 $[a, b']$ でリーマン積分可能。

（∵ f は $[a, b']$ で連続）



定積分 $\int_a^{b'} f(x)\,dx$ が定義されている。

左極限

$\lim_{b' \to b-0} \int_a^{b'} f(x)\,dx$ が存在するとき、f は $[a, b)$ で広義積分可能であるといい、

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b' \to b-0} \int_a^{b'} f(x)\,dx$$

と表す。それを f の $[a, b)$ 上の広義積分という。

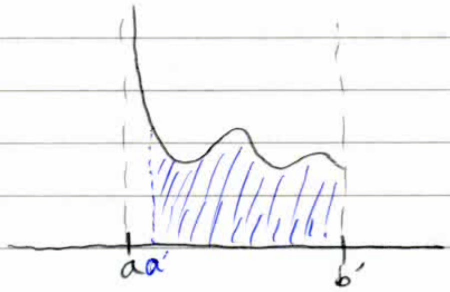
(ii) f が区間 $(a, b]$ 上の非有界な連続関数のとき、

（f は $x=a$ の近くで非有界）

(i) と同様に f の $(a, b]$ 上の広義積分で

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{a' \to a+0} \int_{a'}^b f(x)\,dx$$

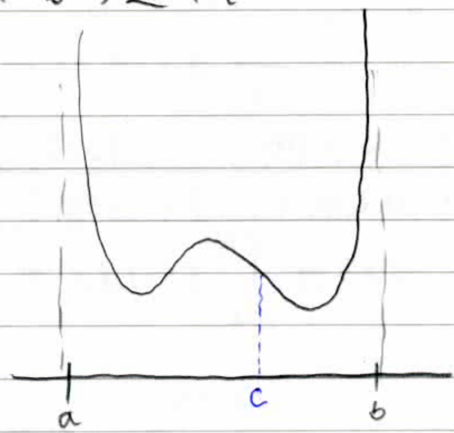
によって定義する。（右辺の右極限が定義されるとき）



(iii) f が開区間 (a, b) 上の連続関数で $x=a$ と $x=b$ の近くで非有界であるとする。

ある $c \in (a, b)$ に対して、2つの広義積分

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{a' \to a+0} \int_{a'}^c f(x)\,dx \\ \quad と \\ \displaystyle\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{b' \to b-0} \int_c^{b'} f(x)\,dx \end{array}\right. \quad \cdots ①$$



が存在するとき、f は (a, b) で広義積分可能であるといい、f の (a, b) での広義積分を

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad \cdots ②$$

によって定義する。

注意

ある $c \in (a, b)$ に対して ① の2つの広義積分が存在する。

$\Longleftrightarrow$ 任意の $c \in (a, b)$ に対して 〃

注意

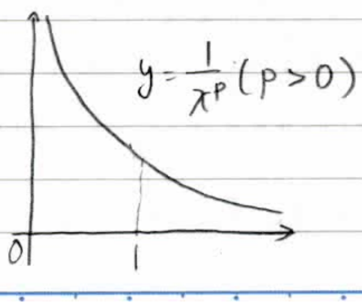
② の右辺の値は $c \in (a, b)$ のとり方によらない。

例

$p > 0$ を定数とする。

覚える

広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ が存在する。 $\Longleftrightarrow$ $p < 1$



No. Date

<u>証明</u>

$y=\frac{1}{x^p}$ は $(0,1]$ 上の連続関数 $\lim_{r\to+0}\int_r^1 \frac{1}{x^2}dx$ の存在について調べる。

・<u>$p\neq 1$ のとき</u>　$0<r<1$ とすると、

$$\int_r^1 \frac{1}{x^p}dx=\left[\frac{1}{1-p}x^{1-p}\right]_r^1=\frac{1}{1-p}(1-r^{1-p})$$

$$\begin{cases}\frac{1}{1-p} & (p<1 \text{ のとき}) \\ \infty & (p\geqq 1 \text{ のとき})\end{cases} \quad (r\to+0)$$

$p=1$ のとき　$0<r<1$ とすると、

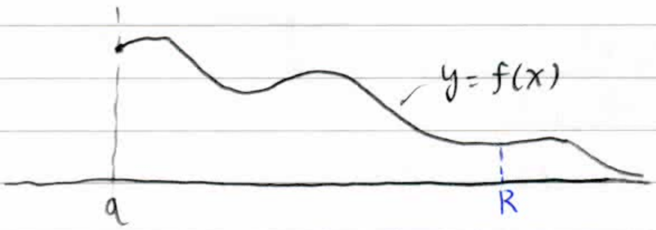
$$\int_r^1 \frac{1}{x}dx=[\log x]_r^1=-\log r\to\infty \quad (r\to+0)$$

以上により、

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx \text{ が存在} \iff p<1$$

<u>無限区間での広義積分</u>

(i) $a\in\mathbb{R}$ とし、f を区間 $[a,\infty)$ 上の連続関数とする。このとき $\forall R>a$ に対して定積分 $\int_a^R f(x)dx$ が定義されている。



極限 $\lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)dx$ が存在するとき、f は $[a,\infty)$ で<u>広義積分可能</u>であるといい、

$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)dx \text{ と表す。}$$

これを f の $[a,\infty)$ 上の<u>広義積分</u>という。

(ii) $b\in\mathbb{R}$ とし、区間 $(-\infty,b]$ 上の連続関数 f に対して、(i) と同様に、f の $(-\infty,b]$ 上の広義積分を

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{R\to-\infty}\int_R^b f(x)dx$$

によって定義する。(右辺の極限が存在するとき)

(iii) f を $\mathbb{R}$ 上の連続関数とする。
あるc∈$\mathbb{R}$に対して2つの広義積分

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx \quad と \quad \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx \quad \cdots ③$$

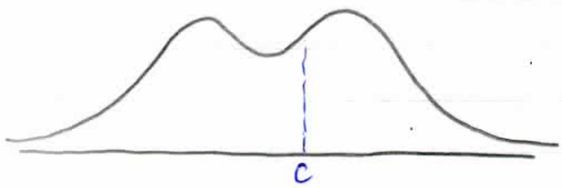
がともに存在するとき、f は $\mathbb{R}$ 上広義積分可能であるといい、
f の $\mathbb{R}$ 上の広義積分を

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx \quad \cdots ④$$

によって定義する。

これを $\int_{R} f(x)\,dx$ と書くことがある。

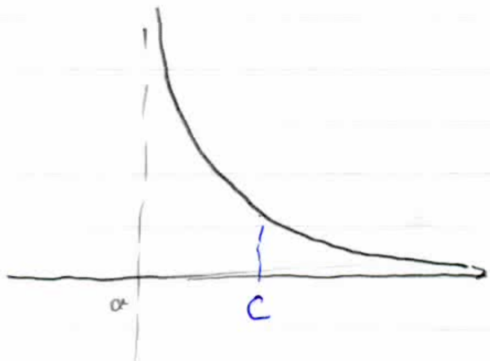
注意
② の2つの広義積分はcのとり方によらず、
④ の右辺の値もcのとり方によらない。



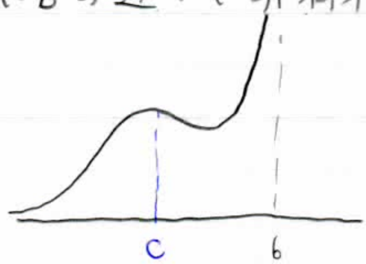
(iv) $a\in\mathbb{R}$とし、fを区間(a,∞)上の連続関数で、$x=a$の近くで非有界とする。
ある$c\in(a,\infty)$に対して、
2つの広義積分 $\int_{a}^{c} f(x)\,dx$ と $\int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$
がともに存在するとき、f は (a,∞) で
広義積分可能であるといい、f の (a,∞) での
広義積分を

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{a}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$$

によって定義する。



(v) $b\in\mathbb{R}$とし、fを区間$(-\infty,b)$上の連続関数で、$x=b$の近くで非有界とする。
(iv)と同様に
$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ を定義する。



例
覚える。
広義積分 $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ が存在 $\Longleftrightarrow$ $p>1$

10/26

1変数の広義積分の収束・発散の判定

$-\infty \leqq a < b < \infty$ として、

広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ が存在するとき、<u>収束する</u>という。

広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ が存在しないとき、<u>発散する</u>という。

<u>定理 4.14</u>（コーシー条件）

$a, b \in \mathbb{R}$ とする。

(1) f を区間 $[a, b)$ 上の非有界な連続関数とする。

・広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b-0} \int_a^t f(x)\,dx$ が収束する。

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ s.t.「$\ell - \delta < t < t' < \ell \Rightarrow \left| \int_t^{t'} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$」

(2) f を区間 $[a, \infty)$ 上の連続関数とする。

広義積分 $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R \to \infty} \int_a^R f(x)\,dx$ が収束する。

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists L > a$ s.t.「$R' > R > L \Rightarrow \left| \int_R^{R'} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$」

<u>証明</u>　(2) のみ示す。

$G(R) = \int_a^R f(x)\,dx$ $(R > a)$ とする。

$\int_a^\infty f(x)\,dx$ が収束 $\Leftrightarrow$ $\lim_{R \to \infty} G(R)$ が存在

$\underset{\text{コーシー条件}}{\Leftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists L > a$ s.t.「$R' > R > L \Rightarrow |\underbrace{G(R') - G(R)}_{= \int_R^{R'} f(x)\,dx}| < \varepsilon$」

<u>命題</u>

$a \in \mathbb{R}$ とし、「$a < b < \infty$」又は「$b = \infty$」とする。f を区間 $[a, b)$ 上の連続関数とする。
($b < \infty$ のときは f は $[a, b)$ で非有界とする)

広義積分 $\int_a^b |f(x)|\,dx$ が収束する。

$\Rightarrow$ 広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は収束し、$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx$

<u>証明</u>

$b = \infty$ のときのみ示す。$\varepsilon > 0$ を任意とする。

$\int_a^\infty |f(x)|dx$ が収束するので、定理 4.14(2) より、

$\exists L>a$ s.t. 「$R'>R>L \Rightarrow \int_R^{R'} |f(x)|dx < \varepsilon$」

$R'>R>L$ ならば、$\left|\int_R^{R'} f(x)dx\right| \leqq \int_R^{R'}|f(x)|dx < \varepsilon$

定積分の単調性

$\int_a^\infty f(x)dx$ は収束する。

$R>a$ のとき、

$\left|\int_a^R f(x)dx\right| \leqq \int_a^R |f(x)|dx$ で $R\to\infty$ とすると、$\left|\int_a^\infty f(x)dx\right| \leqq \int_a^\infty |f(x)|dx$

広義積分 $\int_a^b |f(x)|dx$ が収束するとき、広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ は絶対収束するという。

注意

この命題より、広義積分が絶対収束ならば収束する。しかし、広義積分が収束しても絶対収束するとは限らない。収束するが絶対収束しない広義積分は条件収束するという。

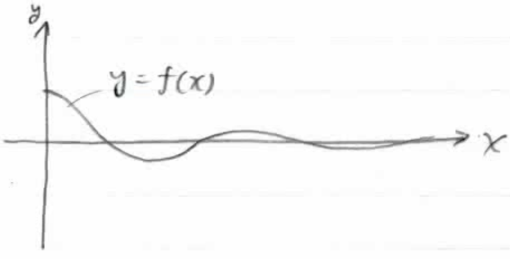
例

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とする。(f は $[0,\infty)$ 上の有界連続関数である)

(1) 広義積分 $\int_0^\infty f(x)dx$ は収束する。

(2) 広義積分 $\int_0^\infty |f(x)|dx$ は収束しない。



証明

(1)(定理 4.14 を使う)

$\varepsilon>0$ を任意にとる。

$R'>R>0$ とすると部分積分により、

$$\int_R^{R'} f(x)dx = \int_R^{R'}\frac{\sin x}{x}dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_R^{R'} - \int_R^{R'}\frac{\cos x}{x^2}dx$$

$$= \frac{\cos R}{R} - \frac{\cos R'}{R'} - \int_R^{R'}\frac{\cos x}{x^2}dx$$

$\lim_{R\to\infty}\int_0^R f(x)dx$ の存在

$$\left|\int_R^{R'} f(x)\,dx\right| \leqq \left|\frac{\cos R}{R}\right| + \left|\frac{\cos R'}{R'}\right| + \int_R^{R'} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx$$

$$\leqq \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} + \int_R^{R'} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{2}{R}$$

$L = \dfrac{2}{\varepsilon}$ とおくと、$R' > R > L = \dfrac{2}{\varepsilon}$ のとき、

$$\left|\int_R^{R'} f(x)\,dx\right| \leqq \frac{2}{R} < \frac{2}{L} = \varepsilon$$

定理4.14(2)より、

$\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ は収束する。

(2') 数列の極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} |f(x)|\,dx$ が存在しないことを示せばよい。

$n \in \mathbb{N}$ とする。

$$\int_0^{n\pi} |f(x)|\,dx = \int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geqq \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{k\pi}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\,dx = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \to \infty \quad (n\to\infty)$$

$\therefore \displaystyle\int_0^{\infty} |f(x)|\,dx$ は収束しない。

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ とすると、$S_{2n} - S_n = \dfrac{1}{n+1} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{2n} > \overbrace{\dfrac{1}{2n} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{2n}}^{n\text{コ}} = \dfrac{1}{2}$

$\{S_n\}$ はコーシー列ではない。

$\{S_n\}$ は増加列なので $S_n \to \infty$

定理4.15 (比較判定法)

$a \in \mathbb{R}$ とし、「$a < b < \infty$」又は「$b = \infty$」とする。

f を区間 $[a,b)$ 上の連続関数とする。

($b<\infty$ のときは f は $[a,b)$ 上非有界とする)

(1) $[a,b)$ 上のある連続関数 g が存在して、

$$\begin{cases} \cdot\ |f(x)| \leqq g(x) \quad (\forall x \in [a,b)) \\ \cdot\ \text{広義積分} \displaystyle\int_a^b g(x)\,dx \text{ が収束する.} \end{cases}$$

このとき、広義積分 $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ は絶対収束して、$\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx$

(2) $f \geqq 0$ のとき、
$[a,b)$ 上のある連続関数 g が存在して以下が成り立つとする。

$$\begin{cases} \cdot\ 0 \leqq g(x) \leqq f(x) \quad \forall x \in [a,b) \\ \cdot\ \text{広義積分} \int_a^b g(x)\,dx \text{ が発散する} \end{cases}$$

このとき広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は発散する。

<u>証明</u>

$b=\infty$ のときに示す。
(1) $\varepsilon > 0$ を任意とする。

$\int_a^\infty g(x)\,dx$ が収束するので、定理 4.14 (2) より、

$\exists L > a$ s.t. 「$R' > R > L \Rightarrow \int_R^{R'} g(x)\,dx < \varepsilon$」

$|f(x)| \leqq g(x)$ なので　$R' > R > L$ ならば、

$$\int_R^{R'} |f(x)|\,dx \leqq \int_R^{R'} g(x)\,dx < \varepsilon$$

$\therefore \int_a^\infty |f(x)|\,dx$ は収束する。 $\Rightarrow$ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ は絶対収束する。

$R > a$ のとき、

$\int_a^R |f(x)|\,dx \leqq \int_a^R g(x)\,dx$ で、$R \to \infty$ として、

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx \leqq \int_a^\infty g(x)\,dx$$

(2) は証明略

<u>$f(x) \geqq 0$ のとき</u>

広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ が収束することを $\int_a^b f(x)\,dx < \infty$ と表す。