2学期 数I·A 4.1変数関数の積分

10/6 第1講
4.1 定積分

定積分の定義

$f(x)$を閉区間$[a,b]$上の有界関数とする.
$[a,b]$をn個の小区間に分ける.つまり$[a,b]$の分割
$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots\cdots<x_n=b$
を考える。(小区間$[x_0,x_1]$、$[x_1,x_2]$, $\cdots\cdots$, $[x_{n-1},x_n]$に分ける)
$x_0, x_1, \cdots\cdots, x_n$を分割$\Delta$の分点という。

$$|\Delta|=\max_{1\leq k\leq n}(x_k-x_{k-1})$$

とおき、$|\Delta|$を分割Δの幅という。
各小区間$[x_{k-1},x_k]$から任意の点ξ_kをとり、和、

$$R[f,\Delta,\{\xi_k\}]=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$$

を考える。
これをΔ;$\{\xi_k\}$に対するリーマン和という。
ξ_kを小区間$[x_{k-1},x_k]$の代表点という。
$|\Delta|\to 0$のとき、代表点$\{\xi_k\}$のとり方によらずに$R[f,\Delta,\{\xi_k\}]$
がある定数αに近づくとき、 $\cdots$ (*)
fは閉区間$[a,b]$でリーマン積分可能(又は積分可能、可積分)
であるという。
このとき極限αを

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

と書き、fの$[a,b]$での定積分という。

注意

(*)は以下を意味している。
$\forall \varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ s.t. $|\Delta|<\delta$をみたす任意の分割Δと代表点$\{\xi_k\}$に対し

$$|R[f,\Delta,\{\xi_k\}]-\alpha|<\varepsilon$$

$$\alpha = \int_a^b f(x)\,dx$$

記号

$$\int_a^a f(x)\,dx=0$$

$$\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx \quad (a<b)$$

と約束する。

積分可能条件

f を閉区間 $[a,b]$ 上の有界閉区間とし、$[a,b]$ の分割

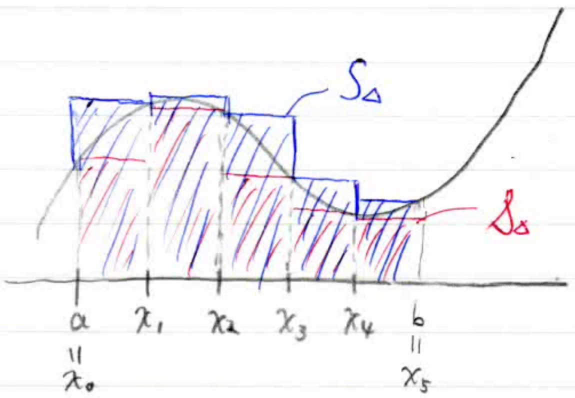
$\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

を考える。

$M_k = M_k[f] := \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$　　$m_k = m_k[f] := \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$　とする。

$S_\Delta = S_\Delta[f] := \sum_{k=1}^{n} M_k[f](x_k - x_{k-1})$

$s_\Delta = s_\Delta[f] := \sum_{k=1}^{n} m_k[f](x_k - x_{k-1})$　とおく。



$S_\Delta[f]$ を $[a,b]$ の分割 Δ に対する過剰和
$s_\Delta[f]$ を $[a,b]$ の分割 Δ に対する不足和　という。

$(b-a)\inf_{x\in[a,b]} f(x) \leqq s_\Delta[f] \leqq R[f, \Delta, \{\xi_k\}] \leqq S_\Delta[f] \leqq (b-a)\sup_{x\in[a,b]} f(x)$

(☆) $[a,b]$ の任意の2つの分割 Δ_1, Δ_2 に対して $s_{\Delta_1}[f] \leqq S_{\Delta_2}[f]$

(☆) の確認

$\Delta_1: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$
$\Delta_2: a = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = b$　とする。

$x_0, \cdots, x_n, y_0, \cdots, y_n$ を分点とする分割を Δ とすると、

$s_{\Delta_1}[f] \leqq s_\Delta[f] \leqq S_\Delta[f] \leqq S_{\Delta_2}[f]$

$S = S[f] := \inf_\Delta S_\Delta[f]$,　$s = s[f] := \sup_\Delta s_\Delta[f]$

$[a,b]$ の分割全体に対する下限，$D[a,b]$ を $[a,b]$ の分割全体とすると、
$\inf_{\Delta \in D[a,b]} S_\Delta[f]$

$S[f]$ を f の $[a,b]$ における上積分
$s[f]$ を　〃　下積分　という。

(☆) より，$s[f] \leqq S[f]$ が成立

定理 4.1（ダルブーの定理）

f を $[a,b]$ 上の有界関数とすると、$|\Delta| \to 0$ のとき、

$S_\Delta[f] \to S[f]$, $s_\Delta[f] \to s[f]$

（証明略）

注意

(i) $\sup s_\Delta = s$ という定義は以下を意味する。

$\begin{cases} \cdot \text{全ての分割 } \Delta \text{ に対して } s_\Delta \leqq s \\ \cdot\ \forall \varepsilon > 0, \exists \Delta \text{ 分割 s.t. } s - \varepsilon < s_\Delta \end{cases}$

(ii) $s_\Delta \leqq s$, $s_\Delta \to s$ $(|\Delta| \to 0)$ は次を意味する。

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t.

$|\Delta| < \delta$ となる任意の分割 Δ に対して、

$|s_\Delta - s| < \varepsilon \Rightarrow s - s_\Delta < \varepsilon$

(ii) は (i) より強いようにみえるが 定理 4.1 は (i) $\Leftrightarrow$ (ii) であることを主張している。

定理 4.2（可積分条件）

f を $[a,b]$ 上の有界積分とする。

(A) f を $[a,b]$ でリーマン積分可能

$\Leftrightarrow$ (B) $S[f] = s[f]$

$\Leftrightarrow$ (C) $\forall \varepsilon > 0, \exists \Delta : [a,b]$ の分割 s.t.

$S_\Delta[f] - s_\Delta[f] < \varepsilon$

これらの条件がみたされるとき、

$$\int_a^b f(x)\,dx = S[f] = s[f]$$

（証明）

(B) $\Rightarrow$ (A)

$S[f] = s[f]$ とする。

$[a,b]$ の任意の分割 Δ と Δ の代表点 $\{\xi_k\}$ に対して、

$s_\Delta[f] \leqq R[f, \Delta, \{\xi_k\}] \leqq S_\Delta[f]$

$s[f]$ $\quad$ $S[f]$

$R[f, \Delta, \{\xi_k\}] \to S[f] (= s[f])$ $\quad (|\Delta| \to 0)$

$\therefore f$ は $[a,b]$ 上可積分 $\quad$ ダルブーの定理

(A) $\Rightarrow$ (B)

f が $[a,b]$ 上可積分とする。

$\varepsilon > 0$ を任意にとる。

$[a,b]$ の n 等分割

$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$$

を考える。

$M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$ とすると、 $\exists \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ s.t.

$$f(\xi_k) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (\because \text{上限の定義})$$

$$R[f, \Delta, \{\xi_k\}] = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$> \underbrace{\sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})}_{= S_\Delta[f]} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_k - x_{k-1})}_{= \varepsilon}$$

$$= S_\Delta[f] - \varepsilon$$

f が可積分なので $n \to \infty$ とすると、

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq S[f] - \varepsilon$$

$\varepsilon > 0$ は任意だったので

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq S[f] \quad \cdots ①$$

同様に $\int_a^b f(x)\,dx \leqq \mathcal{S}[f] \quad \cdots ②$

①, ② より、

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \mathcal{S}[f] \leqq S[f] \leqq \int_a^b f(x)\,dx$$

$$S[f] = \mathcal{S}[f] = \int_a^b f(x)\,dx$$

(B) ⇒ (C)

$S[f] = \mathcal{S}[f]$ とする。

ダルブーの定理より、

$$\lim_{|\Delta| \to 0} (S_\Delta[f] - \mathcal{S}_\Delta[f]) = S[f] - \mathcal{S}[f] = 0$$

⇒ (C) が従う

(C) ⇒ (B)

(C)が成り立つとする。$\varepsilon>0$を任意とする。

$S_\Delta[f]-s_\Delta[f]<\varepsilon$となる分割$\Delta$をとると、

$$\underbrace{S[f]}_{S_\Delta}-\underbrace{s[f]}_{s_\Delta}<S_\Delta[f]-s_\Delta[f]<\varepsilon$$

$\varepsilon>0$は任意だったので

$S[f]-s[f]=0$ ∎

例 (リーマン可積分でない関数の例)

$\mathbb{Q}$:有理数全体とする。

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x\in\mathbb{Q}\text{のとき})\\ 0 & (x\notin\mathbb{Q}\text{のとき})\end{cases}$$

とすると、fは$[0,1]$で有界だが、リーマン積分可能ではない。

証明

$[0,1]$の分割

$\Delta: 0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$を任意にとる。

有理数と無理数の稠密性から、$[x_{k-1},x_k]$には有理数も無理数も属している。

$M_k=\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]}f(x)=1$　　$m_k=\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]}f(x)=0$　　なので、

$S_\Delta[f]=\sum_{k=1}^{n}M_k\cdot(x_k-x_{k-1})=1$

$s_\Delta[f]=\sum_{k=1}^{n}m_k(x_k-x_{k-1})=0$

$S[f]=1$　　$s[f]=0$

$S[f]\neq s[f]$なのでfは$[0,1]$で可積分でない。

定理 4.3

閉区間$[a,b]$上の連続関数はリーマン積分可能である。

証明

fを$[a,b]$上の連続関数とする。$\varepsilon>0$を任意とする。

fは閉区間$[a,b]$で一様連続なので

$\exists\delta>0$ s.t. 「$\forall x,y\in[a,b]$, $|x-y|<\delta$

εのみに依存

$$\Rightarrow |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}」\cdots(*)$$

$|\Delta|<\delta$となる分割

$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$をとる。

$\forall t, s \in [x_{k-1}, x_k]$ に対して、
$|t-s| \leqq x_k - x_{k-1} \leqq |\Delta| < \delta$ なので
(＊)より、$f(t) - f(s) < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$

$$\underbrace{M_k}_{\substack{\max f(x) \\ x \in [x_{k-1}, x_k]}} - \underbrace{m_k}_{\substack{\min f(x) \\ x \in [x_{k-1}, x_k]}} \leqq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$S_\Delta[f] - s_\Delta[f] = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_k - x_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(x_n - x_0) = \varepsilon$$

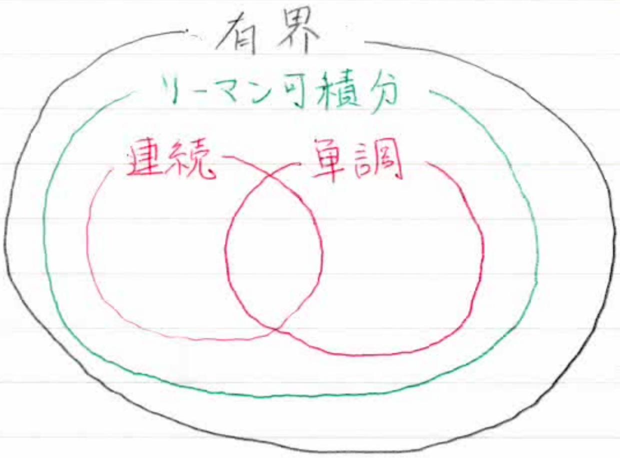
定理 4.5

閉区間 $[a,b]$ 上の単調関数はリーマン積分可能である。
(各自で)

注意

「閉区間 $[a,b]$ 上の有界関数 f の不連続点が有限個
$\Rightarrow$ f は $[a,b]$ でリーマン可積分」
であることが知られている。

閉区間 $[a,b]$ で



定積分の性質

定理 4.6

f, g を閉区間 $[a,b]$ 上可積分とする。

(1) α, β を定数とすると $\alpha f(x) + \beta g(x)$ は $[a,b]$ で可積分で

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx \quad (\text{線型性})$$

(2) 積 $f(x)g(x)$ は $[a,b]$ で可積分である。

(3) $|f(x)|$ は $[a,b]$ で可積分である。

(4) $f(x) \neq 0$ $(\forall x \in [a,b])$ ならば、$\dfrac{1}{f(x)}$ は $[a,b]$ で可積分

証明

(1) $[a,b]$ の任意の分割 Δ と代表点 $\{\xi_k\}$ に対して

$$R[\alpha f+\beta g, \Delta, \{\xi_k\}] = \alpha R[f, \Delta, \{\xi_k\}] + \beta R[g, \Delta, \{\xi_k\}]$$
$$\to \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx \qquad (|\Delta|\to 0)$$

($\because$ f, g が可積分なので)

$\therefore$ $\alpha f(x)+\beta g(x)$ は $[a,b]$ で可積分で①が成立。

((2), (3), (4) は略)

定理 4.7

(1) f が閉区間 $[a,b]$ で可積分

$\Rightarrow$ f は $[a,b]$ に含まれる任意の閉区間で可積分

(2) $a<c<b$ とし、f は閉区間 $[a,c]$ と $[c,b]$ で可積分ならば、f は $[a,b]$ で可積分で

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad \text{(区間に関する加法性)}$$

定理 4.8 (単調性)

f, g は閉区間 $[a,b]$ で可積分で、

$\forall x\in[a,b]$ に対して　$f(x)\leqq g(x)$

であるとする。このとき、以下が成立。

(i) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b g(x)dx$

(ii) 特に、f, g が $[a,b]$ で連続ならば、(i) の等号は $f=g$ のときのみ成立する

$f(x)=g(x)$ ($\forall x\in[a,b]$) という意味

系 f, g, $[a,b]$ 上の可積分関数とすると

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\int_a^b |f(x)+g(x)|\,dx \leqq \int_a^b |f(x)|dx + \int_a^b |g(x)|dx$$

(定理 4.8 から直ちに得られる。)

NO. 8

DATE

定理4.8の証明

$h(x)=g(x)-f(x)$とする
$h(x)$は$[a,b]$で可積分で　$h(x)\geq 0\ (\forall x\in[a,b])$
(i) $[a,b]$の全ての分割Δと代表点$\{\xi_k\}$に対して $R[h,\Delta,\{\xi_k\}]\geq 0$
$|\Delta|\to 0$として
$\int_a^b h(x)dx\geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$ //

(ii) ($f=g$の時(i)の等号成立は自明)
$f(x)\leq g(x)\quad(\forall x\in[a,b])$　f,gが$[a,b]$で連続とする
「(i)の等号成立$\Rightarrow f=g$」を示すために
「$f\neq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx<\int_a^b g(x)dx$」を示す
hは$[a,b]$で連続で、$f\neq g$より $\exists c\in[a,b]$ s.t.
$h(c)=g(c)-f(c)>0$
$h(c)>0$とhの連続性より

$\exists\delta>0$ s.t. 「$|x-c|<\delta,\ x\in[a,b]\Rightarrow |h(x)-h(c)|<\frac{h(c)}{2}$」

$c-\delta<x<c+\delta$のとき　$h(x)>\frac{h(c)}{2}>0$

$$\int_a^b h(x)dx\geqq\int_{c-\delta}^{c+\delta}h(x)dx\geqq\int_{c-\delta}^{c+\delta}\frac{h(c)}{2}dx=h(c)\delta>0$$

$$\int_a^b g(x)dx>\int_a^b f(x)dx$$

定理4.9 (積分の平均値の定理)
fは閉区間$[a,b]$で可積分とし、

$$M=\sup_{x\in[a,b]}f(x),\quad m=\inf_{x\in[a,b]}f(x)\quad \text{とする。}$$

(i) $m\leqq\lambda\leqq M$ かつ $\int_a^b f(x)dx=\lambda(b-a)$

をみたす数λが存在する。
(ii) 特にfが$[a,b]$で連続ならば

$a<c<b$ かつ $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$

をみたす数cが存在する。
(つまり、(i)で$\lambda=f(c)$, $a<c<b$と表される)

証明

(i) 定理 4.8 より、

$$m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq M(b-a) \iff m \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqq M$$

$\lambda = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ とおけば (i) を得る。

(ii) f が $[a,b]$ で連続とする。

このとき $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ 　$m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ に注意する。

f が定数関数ならば、$c \in (a,b)$ は任意の値でよい。(自明)

f は定数関数でないとする。

定理 4.8 (ii) より、

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < M(b-a)$$

$$\iff \underset{\substack{\uparrow\\ \text{最小}}}{m} < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx < \underset{\substack{\uparrow\\ \text{最大}}}{M}$$

f は連続なので、中間値の定理より、

$$a < c < b \text{ かつ } f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

となる数 c が存在する。

4.2 原始関数と定積分

原始関数

定義

$f(x)$ を区間 I 上の関数とする。

$\forall x \in I$ に対して $F'(x) = f(x)$

となる I 上の微分可能な関数 $F(x)$ が存在するとき、

F を f の(区間内における)原始関数という。

注意

F が f の区間 I における原始関数ならば、f の原始関数は全て

$F(x) + c$ 　(c は定数)

の形で与えられる

∵ F, G を f の I での原始関数とすると、
$\forall x \in I$ に対して、

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$G(x) - F(x) = C$ (定数)

f の原始関数を $\int f(x)dx$ と書く。

定積分と原始関数の関係

定理 4.10

f が閉区間 $[a,b]$ で可積分であるとし、

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (x \in [a,b]) \text{ とする。}$$

このとき、g は $[a,b]$ で連続である。

証明

f は $[a,b]$ で有界なので、

$\exists M > 0$ s.t. $|f(x)| \leqq M \quad (\forall x \in [a,b])$

$x \in [a,b]$ を任意にとり、$h \neq 0$　$x+h \in [a,b]$ のとき、

$$|g(x+h) - g(x)| = \left| \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| = \left| \int_x^{x+h} f(t)dt \right|$$

$$\leqq \left| \int_x^{x+h} |f(t)|dt \right| \leqq \left| \int_x^{x+h} M dt \right| \leqq M|h| \to 0 \quad (h \to 0)$$

g は $[a,b]$ で連続

定理 4.11

f を閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数とし、

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (x \in [a,b]) \text{ とする。}$$

このとき g は $[a,b]$ で微分可能で

$$g'(x) = f(x) \quad (x \in [a,b])$$

注意

定理 4.11 より、f が $[a,b]$ で連続ならば

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ は } g \text{ の原始関数である。}$$

閉区間上の連続関数は必ず原始関数をもつ。

<u>定理 4.11 の 証明</u>

$x\in[a,b]$ を任意にとり、$h\neq 0$, $x+h\in[a,b]$ とする。

f は連続なので、積分の平均値の定理より、

$$g(x+h)-g(x)=\int_a^{x+h}f(t)\,dt-\int_a^{x}f(t)\,dt=\int_x^{x+h}f(t)\,dt=f(c_h)h$$

積分の平均値の定理

となる。x と $x+h$ の間の数 c_h が存在する。

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f(c_h)$$

$h\to 0$ のとき、$c_h\to x$ なので f の連続性より、

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f(c_h)\to f(x)\quad(h\to 0)$$

g は $[a,b]$ で微分可能で

$$g'(x)=f(x)\quad(x\in[a,b])$$

<u>定理 4.12</u>（微分積分学の基本定理）

f を閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数とする。F を f の原始関数とすると、

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$ (⇐右辺を $[F(x)]_a^b$ と書くことがある)

<u>証明</u>

定理 4.11 より、f の原始関数は、

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt+C\quad(C\text{は定数})$$

と表される。

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)\,dt$$

<u>注意</u>（もう少し一般化して）

f は $[a,b]$ で可積分。G は $[a,b]$ で連続で、有限個の点を除いて微分可能
G が微分可能な点で $G'(x)=f(x)$ であるとする。

このとき、

$$\int_a^b f(x)\,dx=G(b)-G(a)$$

<u>定理 4.13</u>

(1) <u>部分積分</u> f, g を $[a,b]$ 上の C^1 級関数とする。

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=f(b)\cdot g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b f(x)g(x)\,dx$$