3 多変数関数の微分

$n \in \mathbb{N}$ に対して

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$ とする。

実数をn個並べたもの

$\mathbb{R}^n$ を n次元ユークリッド空間という。

$\mathbb{R}^2$: xy平面　$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^3$: xyz空間

$D \subset \mathbb{R}^n$ とし、n変数関数

$z = f(x_1, \cdots, x_n)$　$(x_1, \cdots, x_n) \in D$ を考える。

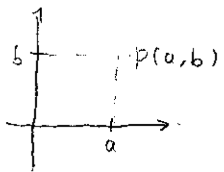
fはD上の関数という。

(以下、主に2変数を考える)

例えば、$f(x, y) = x^2 + y^2$ ← 2変数関数

2変数関数 $f(x, y)$ に対して、点 $P(a, b)$ において $f(a, b)$ を $f(P)$ とも書く。

座標を用いて　点を用いて



3.1 $\mathbb{R}^2$ の部分集合と位相的概念

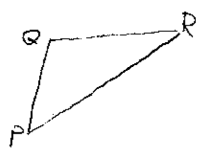
$\mathbb{R}^2$ の2点 $P(x, y)$ と $Q(x', y')$ の距離 $|PQ|$ を

$|PQ| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$ と定める。

$\forall P, Q, R \in \mathbb{R}^2$ に対して

$|PR| \leqq |PQ| + |QR|$ ← 三角不等式

が成立。



$A(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$ に対して

$B_r(A) = \{P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |PA| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r\}$

中心 $A(a, b)$ で半径 r の開円板

定義　$D \subset \mathbb{R}^2$ とする。

(1) D が開集合であるとは、

$\forall A \in D$, $\exists \delta > 0$, s.t. $B_\delta(A) \subset D$ が成り立つこと。

($\mathbb{R}^2$ は開集合) ← 自明

(2) $A \in \mathbb{R}^2$ が D の境界点であるとは、

$\forall \varepsilon > 0$, 「$B_\varepsilon(A) \cap D \neq \phi$ かつ $B_\varepsilon(A) \cap D^c \neq \phi$

D の補集合

D の境界点全体を D の境界といい、∂D と書く。

$\bar{D} = D \cup \partial D$ とし、$\bar{D}$ を D の閉包という。

(3) D が閉集合であるとは、$\partial D \subset D$ が成り立つことをいう。

注　$D \subset \mathbb{R}^2$ に対して、$\bar{D}$ は D を含む最小の閉集合

・Dが閉集合 $\Longleftrightarrow D=\overline{D}$

・Dが閉集合 $\Longleftrightarrow D^c$が開集合

(4) Dが<u>有界</u>であるとは、

「$\exists R>0$ s.t. $D\subset B_R(0)$」が成り立つこと。

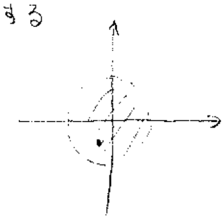
<u>例</u> $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$とする

・Dは開集合

・$\partial D=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$

・$\overline{D}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq 1\}$

・Dは有界



$P_1, P_2, P_3 \cdots$

のように$\mathbb{R}^2$の点を並べたものを点列といい、$\{P_n\}$と表す。

<u>定義</u> $\mathbb{R}^2$の点列$\{P_n\}$が点Aに<u>収束する</u>とは、

$$\lim_{n\to\infty}|P_nA|=0$$

が成り立つことを言う。

このときAを点列$\{P_n\}$の<u>極限点</u>といい、$\lim_{n\to\infty}P_n=A$、又は $P_n\to A\ (n\to\infty)$と表す。

<u>注</u> $P_n=(x_n,y_n)$ $A=(a,b)$とすると、

$\lim_{n\to\infty}P_n=A \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}x_n=a$ かつ $\lim_{n\to\infty}y_n=b$

$\because \max\{|x_n-a|,|y_n-b|\}\leqq|P_nA|$

$=\sqrt{(x_n-a)^2+(y_n-b)^2}$

点列$\{P_n\}$が有界とは、集合$\{P_n(n\in\mathbb{N})\}$が有界であること。

<u>定理3.1</u>($\mathbb{R}^2$でのボルツァノ・ワイエルストラスの定理)

有界な点列は収束する部分点列を含む。

<u>定理3.2</u> (コーシー判定条件)

(a)点列$\{P_n\}$が収束する。

$\Longleftrightarrow$ (b) $\forall\varepsilon>0$、$\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall m,n\geqq N$、$|P_mP_n|<\varepsilon$

(b)が成り立つとき、$\{P_n\}$は<u>コーシー列</u>であるという。

<u>定理3.3</u> $D\subset\mathbb{R}^2$とする。

(a) Dが閉集合である。

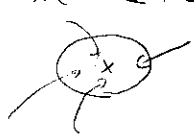
$\Longleftrightarrow$ (b) $P_n\in D\ (\forall n\in\mathbb{N})$をみたし、収束する任意の点列$\{P_n\}$に対して、

$A=\lim_{n\to\infty}P_n$とおくと、<u>$A\subset D$</u>が成立。

3.2 2変数関数の極限と連続性

<u>極限</u>

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=\alpha$$



定義 $D\subset\mathbb{R}^2$、f は D 上の関数

$(a,b)\in\overline{D}=D\cup\partial D$ とする。

$f(x,y)$ が $(x,y)\to(a,b)$ のとき、

α に収束するとは、以下が成り立つこと。

$\forall\varepsilon>0$、$\exists\delta>0$ s.t.

「$(x,y)\in D$ かつ $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta\Rightarrow|f(x,y)-\alpha|<\varepsilon$」

このとき α を $f(x,y)$ の $(x,y)\to(a,b)$ のときの極限値といい、

$\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=\alpha$ 又は、$f(x,y)\to\alpha$ $((x,y)\to(a,b))$

と書く。

$P=(x,y)$、$A=(a,b)$ とすると、この定義は

$\forall\varepsilon>0$、$\exists\delta>0$ s.t.

「$P\in D$ かつ $0<|PA|<\delta\Rightarrow|f(P)-\alpha|<\varepsilon$」となる。

$\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=\alpha$ 又は $f(x,y)\to\alpha$ $((x,y)\to(a,b))$ と書く。

定理3.4 $D\subset\mathbb{R}^2$ f：D 上の関数

$A\in\overline{D}=D\cup\partial D$ とする。

・$\lim_{P\to A}f(P)=\alpha$

$\Longleftrightarrow$ ・$\lim_{n\to\infty}P_n=A$ かつ「$P_n\in D$、$P_n\neq A$ $(\forall n)$」

をみたす任意の点列 $\{P_n\}$ に対して数列 $\{f(P_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束する。

定理3.5 $\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=\alpha$ $\lim_{(x,y)\to(a,b)}g(x)=\beta$ ならば

(1) $\lim_{(x,y)\to(a,b)}(f(x,y)+g(x,y))=\alpha+\beta$

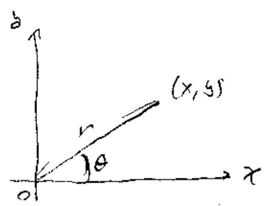
(2) $\lim_{(x,y)\to(a,b)}cf(x,y)=c\alpha$ （c：定数）

(3)、(4) 積商も同様

極座標

・$(x,y)\in\mathbb{R}^2$、$(x,y)\neq(0,0)$ のとき、

右図のように r,θ をとると、



$x=r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$

$(r>0,\ 0\leq\theta<2\pi)$（このとき $r=\sqrt{x^2+y^2}$）

$(x,y)=(0,0)$ のときは $r=0$、θ は不定となる。

注 $f(x,y)$ は $(0,0)$ の近くで定義されていて $(0,0)$ では定義されていても、いなくてもかまわない。

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\alpha\Longleftrightarrow\lim_{r\to+0}\underbrace{\left\{\sup_{\theta\in[0,2\pi)}|f(r\cos\theta,r\sin\theta)-\alpha|\right\}}_{r\text{の}\text{み}}=\underline{0}\quad(*)$$

① $\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=\alpha$ を、r,θ を用いて表すと、

$\forall\varepsilon>0$、$\exists\delta>0$、s.t.

「$0<r<\delta$、$0\leq\theta<2\pi\Rightarrow|f(r\cos\theta,r\sin\theta)-\alpha|\leqq\varepsilon$」

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=\alpha$ を示したければ

$$\begin{cases} \cdot\ |f(r\cos\theta, r\sin\theta)-\alpha| \leqq g(r) \\ \cdot\ \lim_{r\to+0} g(r)=0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} r>0:十分小 \\ 0\leqq\theta<2\pi \end{pmatrix}$$

をみたす関数 $g(r)$ が存在することを示せばよい。
1変数、θによらない

注意 (＊)について
各 $\theta\in[0,2\pi)$ に対して
$\lim_{r\to+0} |f(r\cos\theta, r\sin\theta)-\alpha|=0$
$\lim_{r\to+0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)=\alpha$ を示すだけでは不十分。

例 $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ とすると、

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

∵ $x=r\cos\theta$、$y=r\sin\theta$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$とすると、

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)|=\frac{|r\cos\theta\cdot r\sin\theta|}{r}=r|\cos\theta\cdot\sin\theta|\leqq \underbrace{r}_{g(r)}\longrightarrow 0\ (r\to+0)$$

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=0$

例 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ とすると、

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない。

∵ ・直線：$y=0$ 上を (x,y) が $(0,0)$ に近づくとき、
$\forall x\neq 0$ に対して $f(x,y)=f(x,0)=0$
・直線：$y=x$ 上を (x,y) が $(0,0)$ に近づくとき、
$\forall x\neq 0$ に対して $f(x,y)=f(x,x)=\dfrac{x^2}{x^2+x^2}=\dfrac{1}{2}$

異なる!!

∴ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない。

$f(r\cos\theta, r\sin\theta)=\sin\theta\cos\theta$

例 $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ とすると、

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}$ は存在しない。

∵ $\forall x\neq 0$ に対して $\underset{y=0\text{上}}{f(x,0)}=0$ $\quad \underset{y=x^2\text{上}}{f(x,x^2)}=\dfrac{x^2x^2}{x^4+x^4}=\dfrac{1}{2}$

∴ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない。

注 各 $\theta\in[0,2\pi)$ を固定すると、

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta)=\frac{r\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}\longrightarrow 0\ (r\to+0)$$

となるが $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない。

$y=x^2$のとき、

$r\sin\theta = r^2\cos^2\theta \qquad \sin\theta = r\cos^2\theta$

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\sin^2\theta} = \frac{1}{2}$$

極限が存在するかどうかを判定できるように。

連続性

定義

$D\subset\mathbb{R}^2$とし、$f(x,y)$をD上の関数とする。

・fが点$(a,b)\in D$で連続であるとは、

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

が成り立つことをいう。

・fがDの全ての点で連続であるとき、fはDで連続であるという。

定理3.8（最大値・最小値の定理）

有界閉集合D上の連続関数

$f(x,y)$はDで最大値と最小値をもつ。

定義

(1) $D\in\mathbb{R}^2$が領域であるとは以下が成り立つこと。

・Dが開集合

かつ

・Dの任意の2点はD内の曲線で結ばれる。(このことをDは連結であるという)

(2) 領域とその境界を合わせた集合を閉領域という。(閉領域は閉集合)

例　$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$は領域

$\bar{D}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq 1\}$は閉領域

例　$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}\cup\{(x,y)\mid (x-3)^2+y^2<1\}$は開集合だが、領域ではない。

D内の曲線では結べない。

定理3.9（中間値の定理）

$f(x,y)$を有界閉領域D上の連続関数とする。$P, Q\in D$で$f(P)\neq f(Q)$ならば、fはDで$f(P)$と$f(Q)$の間の値を全てとる。

3.3 偏微分と全微分

偏微分係数と偏導関数

定義　$D\in\mathbb{R}^2$を領域、$(a,b)\in D$、$f(x,y)$をD上の関数とする。

(i) 極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$

が存在するとき、$f(x,y)$は点(a,b)でxに関して偏微分可能であるという。

xの1変数関数 $f(x,b)$ が $x=a$ で微分可能ということ。

この極限を、$f(x,y)$ の点 (a,b) での x に関する偏微分係数といい、

$f_x(a,b)$、$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ と表す。

(ii) $f(x,y)$ の点 (a,b) での y に関する偏微分係数も同様に定義される。

$$f_y(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=\lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}$$

(iii) $f_x(a,b)$ と $f_y(a,b)$ がともに存在するとき $f(x,y)$ は点 (a,b) で偏微分可能であるという。

定義 $D\subset\mathbb{R}^2$ を領域、$f(x,y)$ を D 上の関数とする。

(i) $z=f(x,y)$ が D の全ての点で x に関して偏微分可能であるとき、点 $(x,y)\in D$ に $f_x(x,y)$ を対応させる関数を

$z=f(x,y)$ の x に関する偏導関数といい、f_x, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ と書く。

例 $f(x,y)=x^3-y^2$ とすると、$f_x(x,y)=3x^2$, $f_y(x,y)=-2y$

例 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ とする。

(1) $f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で偏微分可能である。

(2) 〃 連続ではない。

∵(1) $h\neq 0$ のとき、

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\frac{0-0}{h}=0$$

f は点 $(0,0)$ で x に関して偏微分可能で、$f_x(0,0)=0$

同様に $f_y(0,0)=0$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ が存在しない(前回示した)ので、f は点 $(0,0)$ で連続ではない。

例 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ とする。

(1) $f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で偏微分可能ではない。

(2) 〃 〃 で連続である。

∵(1) $h\neq 0$ のとき

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\frac{|h|}{h}=\begin{cases}1 & (h>0)\\ -1 & (h<0)\end{cases}$$

∴ f は点 $(0,0)$ で x に関して偏微分可能ではない。

(2) 自明

注

一般には、2変数関数に対しては「偏微分可能 ⇒ 連続」は成立しない。

もちろん、

「連続 ⇒ 偏微分可能」は成立しない。

定義
$z=f(x,y)$ が領域Dで偏微分可能で、更に f_x と f_y がDで偏微分可能であるとき、f はDで2回偏微分可能という。

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ を $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, f_{xx}, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ を $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, f_{xy}, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ を $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, f_{yx}, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ を $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, f_{yy}, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

と表す。これらを f の2階偏導関数という。
同様に n 回偏微分可能、n 階偏導関数
・f が領域Dで n 回偏微分可能で、f の n 階までの全ての偏導関数がDで連続であるとき、f はDで C^n 級であるという。
f がDで何回でも微分可能なとき、C^∞ 級であるという。

注
一般に $f(x,y)$ が2回偏微分可能であっても f_{xy} と f_{yx} が一致するとは限らない。

例
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
とすると、
$f_{xy}(0,0)=-1$ 　 $f_{yx}(0,0)=1$

確認
(i) $f_x(0,y)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(h,y)-f(0,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\frac{hy(h^2-y^2)}{h^2+y^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{y(h^2-y^2)}{h^2+y^2}=-y$

$f_{xy}(0,0)=\lim_{k\to 0}\dfrac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\dfrac{-k}{k}=-1$

(ii) 同様に $f_{yx}(0,0)=1$
($f_{xy}=f_{yx}$ となる十分条件)

定理3.10
$D\subset\mathbb{R}^2$ を領域，$(a,b)\in D$ とする。D上の関数 $f(x,y)$ についてDで f_{xy} と f_{yx} が存在して、これらが点 (a,b) でともに連続ならば、
$$f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$$
特に f がDで C^2 級 $\Rightarrow f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)\quad(\forall(x,y)\in D)$

<u>系</u> $f(x,y)$ が領域 D で C^n 級ならば、$f(x,y)$ の n 階以下の偏導関数は、偏微分の順序によらず、x, y のそれぞれについて偏微分した回数のみによって定まる。

そこで C^n 級関数 $f(x,y)$ について

$2 \leqq m \leqq n$ のとき、$f(x,y)$ を x について k 回、y について $(m-k)$ 回微分したものを

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial y^{m-k}}$$ と表す。

<u>定理 3.10 の証明</u>

$F(s,t) = f(a+s, b+t) - f(a, b+t) - f(a+s, b) + f(a,b)$ とする。($|s|, |t|$ 十分小)

s を固定して、

$g(y) = f(a+s, y) - f(a, y)$ とする。

$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b) = \lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{F(s,t)}{st}$ を示す。

$F(s,t) = g(b+t) - g(b)$

平均値の定理より、$^\exists \theta \in (0,1)$ s.t.

$F(s,t) = t\, g'(b+\theta t)$

$= t\{ f_y(a+s, b+\theta t) - f_y(a, b+\theta t) \}$

次に t も固定して、x の関数 $f_y(x, b+\theta t)$ に平均値の定理を用いて、$^\exists \theta' (0,1)$ s.t.

$F(s,t) = ts\, f_{yx}(a+\theta' s, b+\theta t)$

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{F(s,t)}{st} = \lim_{(s,t)\to(0,0)} f_{yx}(a+\theta' s, b+\theta t) = f_{yx}(a,b) \cdots ①$$

f_{yx} の連続性

第1変形と第2変形の順序を逆にして同様に

$^\exists \rho, \rho' \in (0,1)$ s.t.

$F(s,t) = st\, f_{xy}(a+\rho s, b+\rho' t)$

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{F(s,t)}{st} = \lim_{(s,t)\to(0,0)} f_{xy}(a+\rho s, b+\rho' t) = f_{xy}(a,b) \cdots ②$$

①, ② より $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$

☆ 全微分

「点 (a,b) の周りで」とは「ある $\delta > 0$ が存在して、$B_\delta((a,b))$ で」を意味する。

<u>定義</u>

$D \subset \mathbb{R}^2$ を領域、$(a,b) \in D$ とする。D 上の関数 $f(x,y)$ が<u>点 (a,b) で</u><u>全微分可能</u>であるとは、$f(x,y)$ が (a,b) の周りで以下のように表されること。

$$f(x,y) = f(a,b) + (x-a)A + (y-b)B + \rho(x,y)G(x,y) \cdots ☆$$

$$\rho(x,y) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

ここで、

- A, Bはある定数
- $G(x,y)$は点(a,b)の周りで定義された関数で、(a,b)で連続で$G(a,b)=0$をみたすある関数

$f(x,y)$が ( )の全ての点で全微分可能であるとき、fは<u>領域Dで全微分可能</u>であるという。

<u>定理 3.11</u>

領域D上の関数$f(x,y)$が点$(a,b)\in D$で全微分可能ならば、以下が成立。

(1) $f(x,y)$は点(a,b)で連続である。

(2) $f(x,y)$は点(a,b)で偏微分可能で
　㊡のA, Bについて
　$A = f_x(a,b)$　　$B = f_y(a,b)$ が成立

<u>証明</u>

(1)は㊡から明らか
（㊡で$(x,y)\to(a,b)$とすればすぐ分かる）

(2) ㊡で$y=b$、$x \neq a$として、

$$f(x,y) = f(a,b) + (x-a)A + \rho(x,b)\cdot G(x,b)$$

$$\left|\frac{f(x,y)-f(a,b)}{x-a} - A\right| = \frac{\rho(x,b)}{|x-a|}\,|G(x,b)| = |G(x,b)| \to 0 \quad (x\to a)$$

（∵Gの連続性）

$f(x,y)$は(a,b)でxについて偏微分可能で　$f_x(a,b) = A$
同様に$B = f_y(a,b)$が得られる。

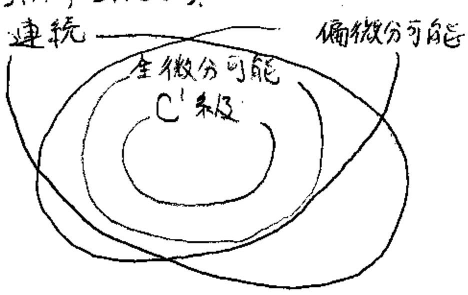
<u>定理 3.12</u>

領域D上の関数$f(x,y)$がDで偏微分可能で偏導関数f_xとf_yの少なくとも一方が点$(a,b)\in D$で連続

$\Rightarrow$ $f(x,y)$は点(a,b)で全微分可能である。
（このことと定理3.11より$f(x,y)$は(a,b)で連続）

特にD上のC^1級関数はDで全微分可能（このことからDで連続）

定理3.11、3.12より



証明

f が D で偏微分可能で、f_x が (a,b) で連続であるとする。

$|s|, |t|$ は十分小とする。(後で $s=x-a,\ t=y-b$ とおく)

$f(a+s,b+t)-f(a,b)=\{f(a+s,b+t)-f(a,b+t)\}+\{f(a,b+t)-f(a,b)\}$ …①

→ $f(a,y)$ の y に関する微分可能性(1変数)より、(定理2.3)

$f(a,b+t)=f(a,b)+t f_y(a,b)+t\,v(t)$ …②

$v(t)$ は $t=0$ で連続で $v(0)=0$ をみたす関数 …③

→ 平均値の定理より $\exists\theta\ (0,1)$ s.t.

$f(a+s,b+t)-f(a,b+t)=s\,f_x(a+\theta s, b+t)$ …④

$u(s,t)=f_x(a+\theta s, b+t)-f_x(a,b)$ …⑤

とすると、f_x の連続性より $u(s,t)\to 0\quad ((s,t)\to(0,0))$ …⑥

$f(a+s,b+t)-f(a,b)\overset{①②④}{=} s f_x(a+\theta s, b+t)+t f_y(a,b)+t\,v(t)$

$\overset{⑤}{=} s f_x(a,b)+t f_y(a,b)+s\,u(s,t)+t\,v(t)$ …⑦

$s=x-a,\ t=y-b$ として、

$$G(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-a)u(x-a,y-b)+(y-b)v(y-b)}{\rho(x,y)} & (x,y)\neq(a,b)\\ 0 & (x,y)=(a,b)\end{cases}$$

$\rho(x,y)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ とおく。

⑦より、(a,b) の周りで

$f(x,y)=f(a,b)+(x-a)f_x(a,b)+(y-b)f_y(a,b)+\rho(x,y)G(x,y)$

$G(x,y)$ は (a,b) で連続

$\because\ |G(x,y)|\leqq \overset{\leqq 1}{\dfrac{|x-a|}{\rho(x,y)}}|u(x-a,y-b)|+\overset{\leqq 1}{\dfrac{|y-b|}{\rho(x,y)}}|v(y-b)|$

$\leqq |u(x-a,y-b)|+|v(y-b)|$

$\because$ ③, ⑥ $\longrightarrow 0=G(a,b)\quad ((x,y)\to(a,b))$

$G(x,y)$ は (a,b) で連続

$\therefore f(x,y)$ は (a,b) で全微分可能

例

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ とする。

(1) $f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で全微分可能である。

(2) 偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ は点 $(0,0)$ で連続ではない。

(従って $f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上 C^1 級ではない)

証明

(1) $h\neq 0 \Rightarrow \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\dfrac{0-0}{h}=0 \qquad \therefore f_x(0,0)=0$

同様に $f_y(0,0)=0$

$$G(x,y)=\begin{cases}\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ とする。

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\,G(x,y)$$
$$=\underbrace{f(0,0)}_{=0}+x\underbrace{f_x(0,0)}_{=0}+y\underbrace{f_y(0,0)}_{=0}+\sqrt{x^2+y^2}\,G(x,y)$$

$G(x,y)$ は $(0,0)$ で連続

∵ $(x,y)\neq(0,0)$ のとき、

$$G(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$|G(r\cos\theta,r\sin\theta)|=\frac{|r\cos\theta\cdot r\sin\theta|}{r}\left|\sin\frac{1}{r}\right|\leqq r\longrightarrow 0\quad(r\to+0)$$

∴ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}G(x,y)=0=G(0,0)$

∴ $f(x,y)$ は $(0,0)$ で全微分可能

(2) f_x についてのみ示す。

$(x,y)\neq(0,0)$ のとき、

$$f_x(x,y)=y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$x>0$ のとき、$y=x$ 上で

$$f_x(x,x)=x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)$$

第1項 $\to 0\ (x\to+0)$ だが、

第2項 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)$ が存在しないので、$\displaystyle\lim_{x\to+0}f_x(x,x)$ が存在しない。

∴ $f_x(x,y)$ は $(0,0)$ で連続ではない。

例 $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ とする。

$G(x,y)$ は $(0,0)$ で連続ではない。

∵ $x>0$ のとき $G(x,0)=0$

$$G(x,x)=\frac{x|x|}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}$$

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}G(x,y)$ は存在しない。 ∴ $G(x,y)$ は $(0,0)$ で連続ではない。

∴ $f(x,y)$ は $(0,0)$ で全微分可能ではない。

接平面

領域D上の関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能とする。

このとき、(a,b) の周りで

$$f(x,y) = \underbrace{f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)}_{1\text{次式}} + \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\, G(x,y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} G(x,y) = 0$$

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\, G(x,y)$ は $(x,y)\to(a,b)$ のとき、1次式 $|x-a|+|y-b|$ より、速く0に収束

大雑把に言うと 1次式(平面)

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \cdots (*)$$

は点 (a,b) の近くでは $f(x,y)$ に十分近い(とほとんど同じ)

$(*)$ で与えられる平面を $z=f(x,y)$ のグラフの点 $(a,b,f(a,b))$ における接平面という。

☆合成関数の偏微分

命題 $D, E \in \mathbb{R}^2$ とする。

$f(u,v)$, $g(u,v)$ をD上の連続関数
$h(x,y)$ はE上の連続関数
とする。

$^\forall(u,v)\in D$ に対して $(f(u,v), g(u,v))\in E$ であるとする。

このとき、合成関数 $h(f(u,v), g(u,v))$ はD上連続である。

定理3.13

2変数関数 $f(x,y)$ は領域Dで全微分可能であるとする。1変数関数 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ は区間Iで微分可能で $(\varphi(t),\psi(t))\in D$ $(^\forall t\in I)$ であるとする。

このとき、合成関数 $z = \underbrace{f(\varphi(t),\psi(t))}_{1\text{変数}}$ は区間Iで微分可能で

$$\frac{dz}{dt} = f_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + f_y(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t) = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} \cdots (*)$$

が成立。

証明

$g(t) = f(\varphi(t),\psi(t))$ とする。

$C\in I$ を任意にとる。

$z=g(t)$ が $t=c$ で微分可能で、$(*)$ が成り立つことを示す。

$a=\varphi(c)$, $b=\psi(c)$ とおく。

$x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ が $t=c$ で微分可能なので

$$x = \varphi(t) = \overset{a}{\varphi(c)} + \varphi'(c)(t-c) + A(t)(t-c) \cdots ①$$

$$y = \psi(t) = \underset{c}{\psi(c)} + \psi'(c)(t-c) + B(t)(t-c) \cdots ②$$

$A(t)$, $B(t)$ は $t=c$ で連続で、$A(c)=B(c)=0$ となる関数

$f(x,y)$ は全微分可能なので、
点 $(a,b)=(\varphi(c), \psi(c))$ の周りで
$f(x,y)=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+\rho(x,y)G(x,y)$ ……③
$\rho(x,y)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ と表される。
$G(x,y)$ は (a,b) で連続で $G(a,b)=0$ となる関数。
①と②を③に代入して、$x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$

$$g(t)=f(\varphi(t), \psi(t))$$
$$=f(a,b)+(t-c)\{f_x(a,b)\varphi'(c)+f_y(a,b)\psi'(c)\}$$
$$+(t-c)\underbrace{\{f_x(a,b)A(t)+f_y(a,b)B(t)+G(\varphi(t), \psi(t))\}}_{=K(t)\text{ とおく。}}$$

$K(t)$ は $t=c$ で連続で $K(c)=0$ (∵命題より)
$g(t)$ は $t=c$ で微分可能で(※)が成立。

定理 3.14 (連鎖公式、連鎖律、chain rule)
・2変数関数 $z=f(x,y)$ は領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ で全微分可能とする。
・ 〃 $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ は領域 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ で偏微分可能で
$\forall(u,v)\in\Omega$ に対して $(\varphi(u,v), \psi(u,v))\in D$ とする。
このとき合成関数 $z=f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$ は Ω で偏微分可能で

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \quad \cdots ①$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \quad \cdots ②$$

が成立。

証明
v を固定して $z=f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$ を u のみの関数とみて定理3.13から
①を得る。同様に②も得られる。

例 極座標
$x=r\cos\theta$ $y=r\sin\theta$ $(r>0, 0\leqq\theta<2\pi)$ とする。
(1) $z=f(x,y)$ が $\mathbb{R}^2$ 上 C^1 級ならば

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta \quad \cdots ①$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=r\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\right) \quad \cdots ②$$

(2) $z=f(x,y)$ が $\mathbb{R}^2$ 上 C^2 級ならば

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

$\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ をラプラス作用素、やラプラシアンという。

証明 (1) $\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}$

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta \quad \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta \quad \frac{\partial x}{\partial \theta}=-r\sin\theta \quad \frac{\partial y}{\partial \theta}=r\cos\theta \quad \cdots③$$

なので、①,②を得る.

(2) (右辺を計算する)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)\overset{①}{=}\frac{\partial}{\partial r}\underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right)}_{r,\theta の関数}$$

$$=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cos\theta+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\sin\theta$$

$$=\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\right\}\cos\theta+\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\right\}\sin\theta$$

$$\overset{③}{=}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\sin\theta\right)\cos\theta+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin\theta\right)\sin\theta$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\theta+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\theta \cdots ④$$

同様に

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}=r^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\sin^2\theta-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cos^2\theta\right)-r\underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right)}_{=r\frac{\partial z}{\partial r}}\cdots⑤$$

④,⑤より.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

注 3変数の chain rule $g=f(x,y,z)$

$x=x(u,v,w)$ $y=y(u,v,w)$ $z=z(u,v,w)$

$$\frac{\partial g}{\partial u}=\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial g}{\partial w}=\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial g}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial w}$$

☆ テイラーの定理 (2変数)

定理 3.15 (2変数のテイラーの定理)

$D\subset\mathbb{R}^2$ を領域 $(a,b)\in D$ $f(x,y)$ は D で C^n 級とし

$\{(a+ht, b+kt) \mid 0\leq t\leq 1\}\subset D$ であるとする

(a,b) と $(a+h, b+k)$ を結ぶ線分

このとき $0<\theta<1$ かつ

$$f(a+h,b+k)=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(a,b)+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a+\theta h,b+\theta k)$$

$$=f(a,b)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1}f(a,b)$$

$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a+\theta h,b+\theta k)$$

をみたす θ が存在する。

ここで $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(p,q)=\sum_{s=0}^{m} {}_mC_s h^s k^{m-s}\frac{\partial^m f}{\partial x^s\partial y^{m-s}}f(p,q)$ $(m\geqq 1)$

$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^0 f(p,q)=f(p,q)$ である。

特に $n=1$ のとき

$f(a+h,b+k)=f(a,b)+hf_x(a+\theta h,b+\theta k)+kf_y(a+\theta h,b+\theta k)$

を2変数の平均値の定理という。

注　$m=1$ のとき $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f=h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}$

$m=2$ のとき $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f=h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

証明　$F(t)=f(a+ht,b+kt)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ とする。

$F(t)$ は $[0,1]$ 上 C^n 級

$F(t)$ に1変数のテイラーの定理を用いると、$^\exists\theta(0,1)$ s.t.

$f(a+h,b+k)=F(1)$

$$=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{F^{(m)}(0)}{m!}1^m+\frac{F^{(n)}(\theta\cdot 1)}{n!}1^n=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{m!}F^{(m)}(0)+\frac{1}{n!}F^{(n)}(\theta)\cdots ①$$

一方、$F^{(m)}(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(a+ht,b+kt)\cdots ②$ が成立。

（m に関する帰納法、定理3.13を使って示される）

①,② よりテイラーの定理の式が得られる。

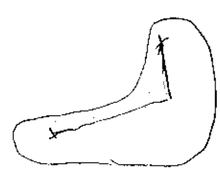
系　領域 D 上の C^1 級関数 $f(x,y)$ が

$\forall(x,y)\in D$ に対して $f_x(x,y)=0$ かつ $f_y(x,y)=0$

をみたすとき、$f(x,y)$ は D 上の定数関数

1

2変数の平均値を使う。　難波 p.154 系



3.4 2変数関数の極値と最大・最小問題

④ 極値 (2変数)

定義 $D \subset \mathbb{R}^2$ を領域、$f(x,y)$ を D 上の関数とする。

f が点 $A \subset D$ で極大[極小]であるとは、

$^\exists \delta > 0$ s.t 「$P \in D$ かつ $0 < |PA| < \delta \Rightarrow f(P) < f(A)$ [$f(P) > f(A)$]」

が成り立つことをいう。

このとき、$f(A)$ を極大値[極小値]という。

極大値と極小値を合わせて極値という。

定理 3.16 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数 $f(x,y)$ が点 $(a,b) \in D$ で極値をとる … (*)

$\Rightarrow f_x(a,b) = 0$ かつ $f_y(a,b) = 0$

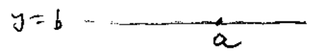
証明 (背理法) (*) が成り立つとする。

$f_x(a,b) \neq 0$ と仮定する。

・$f_x(a,b) > 0$ とする。

f_x の連続性から、(a,b) の十分近くで $f_x(x,y) > 0$ 特に $f_x(x,b) > 0$

$f(x,b)$ は $x = a$ のまわりで狭義単調増加



このことは $f(a,b)$ が極値であることに矛盾する

・$f_x(a,b) < 0$ のとき、$f(x,b)$ は $x = a$ のまわりで狭義単調減少となり矛盾。

$\therefore f_x(a,b) = 0$ 同様に $f_y(a,b) = 0$ も示される。

$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ をみたす点 (a,b) を f の停留点という。

注意 定理 3.16 の逆は必ずしも成立しない

例えば、$f(x,y) = x^4 - y^4$ とすると、

$f_x(x,y) = 4x^3$ $f_y(x,y) = -4y^3$ なので $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(0,0) = 0 \\ \text{しかし } \forall x \neq 0 \quad f(x,0) = x^4 > 0 \\ \forall y \neq 0 \quad f(0,y) = -y^4 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x,y) \text{ は点 } (0,0) \text{ で極値をとらない}$$

例 (簡単な場合)

$f(x,y) = x^4 + y^4$ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ の極値を全て求める。

解答 $f_x(x,y) = 4x^3$ $f_y(x,y) = 4y^3$ より、

$f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0 \iff (x,y) = (0,0)$

(極値をとるとすれば $(0,0)$ のみ)

$(x,y) \neq (0,0)$ のとき $f(x,y) = x^4 + y^4 > 0 = f(0,0)$

なので、f は点 $(0,0)$ で極小値 $f(0,0) = 0$ をとる。

定理 3.17 (極値の判定 (1つの方法))

$D \subset \mathbb{R}^2$ を領域; $(a,b) \in D$ $f(x,y)$ は D 上の C^2 級関数で

$f_x(a,b) = 0$ かつ $f_y(a,b) = 0$ であるとする。

$A = f_{xx}(a,b)$ $B = f_{xy}(a,b)$ $C = f_{yy}(a,b)$ とおく。

このとき、以下が成立。
(1) $AC-B^2>0$ かつ $A>0 \Rightarrow f$ は点 (a,b) で極小
(2) $AC-B^2>0$ かつ $A<0 \Rightarrow f$ は点 (a,b) で極大
(3) $AC-B^2<0$ のとき、f は点 (a,b) で極値をとらない。

注 定理3.17では $AC-B^2=0$ のときは一般には判定できない
前の2つの例より、
・$f(x,y)=x^4+y^4$ のとき、
$(x,y)=(0,0)$ で $AC-B^2=0$ であるが $(0,0)$ で極小
一方
・$g(x,y)=x^4-y^4$ のとき、
$(x,y)=(0,0)$ で $AC-B^2=0$ であるが、$(0,0)$ で極値をとらない。

例 $f(x,y)=x^4-xy+y^4$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ の極値

解答 $f_x(x,y)=4x^3-y$　$f_y(x,y)=4y^3-x$

$f_x(x,y)=f_y(x,y)=0 \iff \underline{(x,y)=(0,0)\ (\frac{1}{2},\frac{1}{2}),\ (-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}$
↳ f が極値をとるとすればこれらの点のみ

$A=f_{xx}(x,y)=12x^2$　$B=f_{xy}(x,y)=-1$　$f_{yy}(x,y)=12y^2$

(i) $(x,y)=(0,0)$ のとき、$A=C=0$　$B=-1$
$AC-B^2=-1<0$
f は $(0,0)$ で極値をとらない。

(ii) $(x,y)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ のとき、$A=C=3$　$B=-1$
$AC-B^2=8>0$　　$A=3>0$
f は $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ で極小値 $f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=-\frac{1}{8}$ をとる。

(iii) $(x,y)=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ のとき、$A=C=3$　$B=-1$
$AC-B^2=8>0$　　$A=3>0$
f は $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ で極小値 $f(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=-\frac{1}{8}$ をとる。

注 $AC-B^2=\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}=\det\underbrace{\begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}}$
f のヘッセ行列という。

記号 $(\alpha f+\beta g)(x,y)=\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)$ と書く
$(f\cdot g)(x,y)=f(x,y)\cdot g(x,y)$

定理3.17の証明 $(h,k)\neq(0,0)$　$|h|,|k|$ は十分小とする。
テイラーの定理（2次）と①より、
$\exists\theta\in(0,1)$ s.t.
$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\frac{1}{2}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a+\theta h,b+\theta k)$
　　正負を調べる。
$=\frac{1}{2}(h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy})(a+\theta h,b+\theta k)\cdots②$

(1) $AC-B^2=(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)(a,b)>0$ … ③
$A=f_{xx}(a,b)>0$ ④ とする。

f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} の連続性より、$|h|, |k|$ が十分小のとき
$(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)(a+\theta h, b+\theta k)>0$ … ⑤
$f_{xx}(a+\theta h, b+\theta k)>0$ … ⑥

⑤より、t の2次方程式
$(t^2f_{xx}+2tk\cdot f_{xy}+k^2f_{yy})(a+\theta h, b+\theta k)=0$ … ⑦ の判別式 D に対して、

$$\frac{D}{4}=k^2(f_{xy}^2-f_{xx}f_{yy})(a+\theta h, b+\theta k)<0$$

これと⑥より、$\forall t\in\mathbb{R}$、
$(t^2f_{xx}+2tk\cdot f_{xy}+k^2f_{yy})(a+\theta h, b+\theta k)>0$
(②は⑦の左辺で $t=h$ としたもの)
②より、$|h|, |k|$ が十分小さいとき
$f(a+h, b+k)-f(a,b)>0$
f は点 (a,b) で極小

(2) $AC-B^2=(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)(a,b)>0$
$A=f_{xx}(a,b)<0$ とする。

$|h|, |k|$: 十分小 $\Rightarrow f_{xx}(a+\theta h, b+\theta k)<0$
⑦の判別式 $D<0$ ((1)と同様)
$\forall t\in\mathbb{R}$ $(t^2f_{xx}+2tk\, f_{xy}+k^2f_{yy})(a+\theta h, b+\theta k)<0$
(②は⑦の左辺で $t=h$ としたもの)
②より、$|h|, |k|$ が十分小さいとき、
$f(a+h, b+k)-f(a,b)<0$
f は点 (a,b) で極大

(3) $AC-B^2<0$ とする。
このとき、2次式 $At^2+2Bt+C$ は正にも負にもなる
(∵ $A\neq 0$ なら判別式が正
$A=0$ なら $B\neq 0$ なので1次式)
つまり、$\exists p\in\mathbb{R}$ s.t. $Ap^2+2Bp+C>0$
$\exists q\in\mathbb{R}$ s.t. $Aq^2+2Bq+C<0$

・$h=pk$ とおいて②を k^2 でわると、

$$\frac{f(a+pk, b+k)-f(a,b)}{k^2}=\frac{1}{2}(p^2f_{xx}+2pf_{xy}+f_{yy})(a+\theta pk, b+\theta k)$$

$$\to\frac{1}{2}(Ap^2+Bp+C)>0\quad(k\to 0)$$

$|k|$ が十分小のとき、$f(a+pk, b+k)-f(a,b)>0$ ⑧

・$h=gk$ とおいて同様に、

$$\frac{f(a+gk,\ b+k)-f(a,b)}{k^2} \longrightarrow \frac{1}{2}(Ag^2+2Bg+C)<0 \qquad (k\to 0)$$

$|k|$: 十分小 $\Rightarrow f(a+gk,\ b+k)-f(a,b)<0$ … ⑨

∴ $AC-B^2<0$ のとき、f は点 (a,b) で極値をとらない。∎

㊟ 最大・最小問題（2変数）

$D\subset\mathbb{R}^2$ を有界閉領域とし、$\mathring{D}=D\setminus\partial D$ とする。（$A\setminus B=\{x \mid x\in A$ かつ $x\notin B\}$）

（$\mathring{D}$ を D の内部という。$\mathring{D}$ は領域である）

$f(x,y)$ は有界閉領域 D で連続で、$\mathring{D}$ で C^1 級とする。

↳ f は D で最大値と最小値を必ずとる。（定理 3.8）

f の D での最大値（あるいは最小値）を与える点 P は

(i) $P\in\partial D$ （境界上にある）

又は、

(ii) $P\in\mathring{D}$ かつ $f_x(P)=f_y(P)=0$

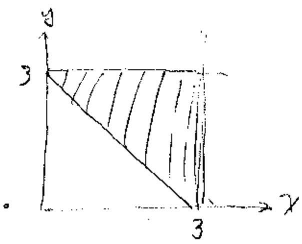
のいずれかをみたす。

最大値 最小値を与える点を調べるには これらの候補点で $f(P)$ の値を比較すればよい。

<u>例</u> $f(x,y)=(3-x)(3-y)(x+y-3)$ の有界閉領域

$D=\{(x,y) \mid x\leq 3,\ y\leq 3,\ x+y\geq 3\}$

での最大値、最小値



（解答）

f は D で連続なので、D で最大値、最小値を必ずもつ。
（D：有界閉領域）

・$\forall(x,y)\in D$、$f(x,y)\geq 0$

・$\forall(x,y)\in\partial D$　$f(x,y)=0$　　　$\mathring{D}=\{(x,y) \mid x<3,\ y<3,\ x+y>3\}$

・$\forall(x,y)\in\mathring{D}$　$f(x,y)>0$

従って、f は ∂D 上で<u>最小値 0</u> をとる。

最大値を求める。最大値は $\mathring{D}$ でとる。

$f_x(x,y)=(3-y)(6-2x-y)$、$f_y(x,y)=(3-x)(6-x-2y)$

$(x,y)\in\mathring{D}$ かつ $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0 \iff (x,y)=(2,2)$

以上より、(i)(ii)によると、点 $(2,2)$ 以外に f が D で最大となる点の候補は存在しない。

f は D で<u>最大値 $f(2,2)=1$</u> をとる。∎

<u>一様連続性について</u>

（まず1変数）

<u>復習</u> f が区間 I で連続 $\iff \forall x\in I,\ \lim_{t\to x}f(t)=f(x)$

$\iff \forall x\in I,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ s.t.「$t\in I,\ |t-x|<\delta \Rightarrow |f(t)-f(x)|<\varepsilon$」

（δ：一般には ε と x に依存する）

定義 fが区間Iで一様連続であるとは、次が成り立つこと。

$\forall \varepsilon>0$、$\exists \delta>0$、s.t.「$x, x' \in I$，$|x-x'|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x')|<\varepsilon$」

（「$|x-x'|<\delta$ をみたす $\forall x, x' \in I$ に対して、$|f(x)-f(x')|<\varepsilon$」）

εのみに依存する。後のx, x'によらない。

（注意）(1) fが区間Iで一様連続 $\Rightarrow$ Iで連続

(2) fが区間Iで連続であるからといって、一般には一様連続であるとは限らない。

例えば、$f(x)=\frac{1}{x}$ は区間$(0,1]$で連続だが一様連続ではない。

① 一様連続でないことを示すには、

$\exists \varepsilon_0>0$ s.t. $\forall \delta>0$、$\exists x, x' \in I$ s.t.「$|x-x'|<\delta$ かつ $|f(x)-f(x')| \geqq \varepsilon_0$」

を示せばよい。

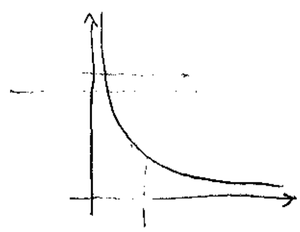
$\delta>0$を任意にとる。$n \in \mathbb{N}$、$x_n=\frac{1}{n}$ とする。

$|x_n-x_{n+1}|=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right|=\frac{1}{n(n+1)}<\delta$ をみたす $n \in \mathbb{N}$ をとる。

$|f(x_n)-f(x_{n+1})|=\left|\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n+1}}\right|=|n-(n+1)|=1$ （$\varepsilon_0=1$として示した）

（$x_n \in I$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ に注意）

$f(x)=\frac{1}{x}$ は$(0,1]$で一様連続ではない。∎



定理 閉区間$[a,b]$上の連続関数fは$[a,b]$で一様連続である。

証明（背理法）fが$[a,b]$で連続だが一様連続でないとする。

$\exists \varepsilon_0>0$ s.t. $\forall \delta>0$ $\exists x, x' \in [a,b]$ s.t.「$|x-x'|<\delta$ かつ $|f(x)-f(x')| \geqq \varepsilon_0$」である。

（ここで $\delta=\frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ とする。）

$\forall n \in \mathbb{N}$、$\exists x_n, x_n' \in [a,b]$ s.t.

$|x_n-x_n'|<\frac{1}{n}$ かつ $|f(x_n)-f(x_n')| \geqq \varepsilon_0$ … ※

数列$\{x_n\}$,$\{x_n'\}$を考える。

$\{x_n\} \subset [a,b]$なので、$\{x_n\}$は有界列

ボルツァノ・ワイエルストラスの定理より、$\{x_n\}$の収束部分列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$がとれる。

$c=\lim_{k \to \infty} x_{n_k}$ とおく。

$a \leqq x_{n_k} \leqq b$ なので、$c \in [a,b]$

$|x_{n_k}'-c| \leqq |x_{n_k}'-x_{n_k}|+|x_{n_k}-c| \leqq \frac{1}{n_k}+|x_{n_k}-c| \to 0$ $(k \to \infty)$

$\lim_{k \to \infty} x_{n_k}'=c$

fの連続性より、$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c)$　$\lim_{k\to\infty} f(x_{n'_k}) = f(c)$

　$|f(x_{n_k}) - f(x_{n'_k})| \to 0 \quad (k \to \infty)$　…①

一方、(*)より、$|f(x_{n_k}) - f(x_{n'_k})| \geq \varepsilon_0$ …②

①,②は矛盾。

　$\therefore$ fは$[a,b]$で一様連続。

（2変数）

<u>定理</u>　有界閉集合$D \subset \mathbb{R}^2$上の2変数連続関数$f(x,y)$はDで一様連続である。

つまり、$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t.「$P, Q \in D$　$|PQ| < \delta \Rightarrow |f(P) - f(Q)| < \varepsilon$」が成立

<u>曲線</u>

・閉区間$[a,b]$上の連続関数

　　$x = x(t)$，$y = y(t)$ によって与えられる点

　$P(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ の軌跡，

　$C = \{P(t) = (x(t), y(t)) \mid t \in [a,b]\}$

を曲線という，tをCのパラメータという．

・Cが<u>C^1級曲線</u>であるとは

　$x(t)$, $y(t)$が$[a,b]$でC^1級で$\forall t \in (a,b)$に対して$(x'(t), y'(t)) \neq (0,0)$

　であることをいう．

NO.

DATE

成績　期末中心
優 80%前後
総体評価
90分　持ちこみ禁止
範囲：今日おわったとこまで
(一様連続は試験範囲外)
・極限と連続性
・1変数関数の微分
・多変数関数の微分

最低限できてほしい問題は出す，
上位の差をつける問題をだす．

点がとれなくてもきにしない！

難易度が高い！
量が多い！
らしい

競争試験
おちつこう！

参考問題の類題もだす，
(チェック)