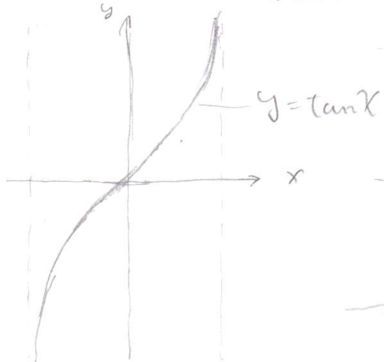
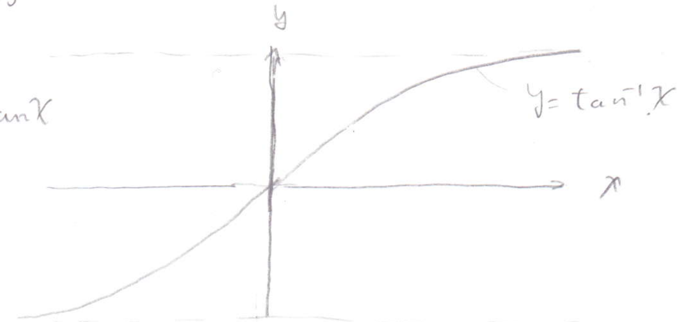
3) $\tan x$ は $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ で狭義単調増加、連続、値域 $\mathbb{R}$

その逆関数を $\tan^{-1}x$ や $\arctan x$ と書く。

$\tan^{-1}x$ は $\left\{\begin{array}{l}\text{定義域 } \mathbb{R} \\ \text{値域 } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\end{array}\right\}$ で、狭義単調増加、連続





Ⓐ 指数関数

$a>0$、$x\in\mathbb{R}$ に関して a^x を定義したい。

$q\in\mathbb{Q}$ のとき a^q は知っている。 $q=\frac{n}{m}$ のとき、$a^q=(a^n)^{\frac{1}{m}}=(a^{\frac{1}{m}})^n$

↑有理数全体　　　　$(n\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{N})$

補題 $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ に対して

$$r_1<r_2<r_3<\cdots\cdots r_n\to\alpha\ (n\to\infty)\ \cdots(*)$$

となる有理数の列 $\{r_n\}$ が存在する。

∵ 有理数の稠密性より、$\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists r_n\in\mathbb{Q}$ s.t.

$$\alpha-\frac{1}{n}<r_n<\alpha-\frac{1}{n+1}$$

この $\{r_n\}$ は $(*)$ をみたす。$(*)$ のとき $r_n\nearrow\alpha$ とかく。

手順(i) $a>1$ とする

$x\in\mathbb{R}$ とする $q_n\nearrow x$ $(n\to\infty)$ となる有理数列 $\{q_n\}$ をとる。

$\{a^{q_n}\}$ は上に有界な増加列で収束する。

(∵ $x<b$ となる $b\in\mathbb{Q}$ に対して、$a^{q_n}<a^b$ だから
(有理数乗の単調性を用いた))

$a^x=\lim a^{q_n}$ と定義する

注 この値は $q_n\nearrow x$ となる有理数列 $\{q_n\}$ のとり方によらずに定まる。(確認必要)

(ii) $0<a<1$ のとき $a^x=\left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$ と定義する。(今 $\frac{1}{a}>1$)

(iii) $1^x=1$ とする。

このようにして $\mathbb{R}$ 上の関数 $y=a^x$ が定義される(指数関数)

狭義単調性、連続性、指数法則、$x\to\pm\infty$ での極限、グラフ(難波 例1.17など)

$a>1$ のとき　$a^x=\sup\{a^q \mid q\in\mathbb{Q}, q<x\}$ が成り立つ。

e:ネイピア数のとき、$e^x=\exp x$ と書くことがある。$\left(\exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right)\text{など}\right)$

NO. 18

DATE

㊛ 対数関数

$a>0$、$a\neq 1$ のとき $y=a^x$ の逆関数を $y=\log_a x$ $(x>0)$ と定義する。
↖対数関数

$\log_e x$ を $\log x$ と書く。

㊛ 双曲線関数（記号） $\mathbb{R}$ 上の関数

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

↖ハイパボリックサインとよぶ。

例 関数の極限として、

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

(4) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h}=1$ (5) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$

証明 (1) $x>1$ として、$n\leq x<n+1$ となる $n\in\mathbb{N}$ をとる。

$x\to\infty$ のとき $n\to\infty$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}}_{\to e\ (n\to\infty)}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\to e\ (n\to\infty)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

(2) $x<-1$ とする。$t=-x$ とすると、$x\to-\infty$ のとき、$t\to\infty$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\left(\frac{t}{t-1}\right)^t=\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t=\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)$$

$$\xrightarrow[(1)]{} e\times 1=e\quad (t\to\infty)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

(3) $0<x<1$ とする。$y=\frac{1}{x}$ とすると、$x\to+0$ のとき $y\to\infty$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\to e\quad (y\to\infty)\quad (\because (1))$$

$\because \displaystyle\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

同様に $\displaystyle\lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

(4) $\displaystyle\frac{\log(1+h)}{h}=\log(1+h)^{\frac{1}{h}}\longrightarrow \log e=1\quad (h\to 0)$
↖(3)と $\log x$ の連続性

(5) $t=e^h-1$ とすると、$h=\log(1+t)$

$h\to 0$ のとき $t\to 0$ (4)を使う。

2 1変数関数の微分

2.1 微分係数と導関数

定義 $a\in\mathbb{R}$とし、Iを$a\in I$となる開区間とする。f: I上の関数とする。

極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在するとき、
$=f'(a)$

fは点aで微分可能であるといい、この極限値を
fの$x=a$における微分係数といって、$f'(a)$と書く。

定理 2.1 関数$f(x)$が$x=a$で微分可能 $\Rightarrow$ $f(x)$は$x=a$で連続

証明 $\displaystyle\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)=f'(a)\times 0=0$

$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$　　fは$x=a$で連続

定義 $a\in\mathbb{R}$とし、Iを$a\in I$となる区間とする。f: I上の関数とする。

右極限 $\displaystyle\lim_{h\to +0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'_+(a)$

が存在するとき fは$x=a$で右微分可能であるという。
このとき上の右極限をfのaでの右微分係数といい$f'_+(a)$と書く。
同様に左微分係数 $f'_-(a)=\displaystyle\lim_{h\to -0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$も定義される。

まとめて片側微分係数という。

注意 ・fがaで微分可能
$\Longleftrightarrow$・fがaで右微分可能かつ左微分可能で $f'_+(a)=f'_-(a)$
このとき $f'(a)=f'_+(a)=f'_-(a)$

定義 区間I上の関数fがIの全ての点で微分可能であるとき、fは区間Iで微分可能という。
（Iの端点がIに属するときは、その端点では、片側微分係数をもつだけでよい）
このとき、各$x\in I$に対して微分係数$f'(x)$を対応させる(新しい)関数をfの導関数といい、f'と書く。
$y=f(x)$の関数を $\frac{df}{dx}$, y', $\frac{dy}{dx}$ とも書く。

既知
・f,g 微分可能 $\Rightarrow$ $(f+g)'=f'+g'$, $(fg)'=f'g+fg'$　$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$
・$(x^n)'=nx^{n-1}$　$(\sin x)'=\cos x$　$(\cos x)'=-\sin x$　$(e^x)'=e^x$　$(\log x)'=\frac{1}{x}$

$f(x)=|x|$は$x=0$で微分可能でない。

「点aの周りで」や「点aの近くで」とは「$a\in I$となる開区間Iで」を意味する。

定理 2.3 fを点aのまわりで定義された関数とする
(a) fが$x=a$で微分可能
$\Longleftrightarrow$ (b) 点aのまわりで

$$f(x)=f(a)+(x-a)A+(x-a)B(x) \quad (*)$$
と表される。

ここで
・Aはある定数
・$B(x)$はaのまわりで定義されたある関数で
$x=a$で連続で$B(a)=0$であるもの。

これらが成り立つとき、$A=f'(a)$である。
(a),(b)

(a) → (b)

$$B(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) & (x \neq a) \\ 0 & (x = a) \end{cases}$$ とする.

このとき、点 a のまわりで $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)B(x)$ と表される.

$f(x)$ が $x = a$ で微分可能なので

$\lim_{x\to a} B(x) = f'(a) - f'(a) = 0$
一方 $B(a) = 0$
$\therefore \lim_{x\to a} B(x) = 0 = B(a)$
$B(x)$ は $x=a$ で連続

(b) ⇒ (a) (※) より

$x \neq a$ のとき $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = A + B(x) \to A + \underbrace{B(a)}_{0} = A$ ($B(x)$ は $x=a$ で連続)

$\therefore f$ は $x=a$ で微分可能

以上から $A = f'(a)$ が分かる.

定理 2.4 (合成関数の微分法)

f: 区間 I 上微分可能
g は $f(I)$ を含む区間で微分可能
とする.

このとき合成関数 $g\circ f$ は I 上微分可能で

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) \quad (x \in I)$$

証明 $a \in I$ を任意とする。

a のまわりで $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)B(x)$ …①

$b = f(a)$ として, b のまわりで $g(y) = g(b) + (y-b)g'(b) + (y-b)D(y)$ …②

ここで $\begin{cases} B(x) \text{ は } x=a \text{ で連続で } & B(a) = 0 \\ D(x) \text{ は } y=b \text{ で 〃} & D(b) = 0 \end{cases}$

$y = f(x)$, $b = f(a)$ を②に代入

$g(f(x)) = g(f(a)) + (f(x)-f(a))(g'(f(a)) + D(f(x)))$

①を代入 $= g(f(a)) + (x-a)(f'(a) + B(x))(g'(f(a)) + D(f(x)))$

$= g(f(a)) + (x-a)g'(f(a))f'(a) + (x-a)E(x)$

ここで $E(x) = B(x)g'(f(a)) + (f'(a) + B(x))D(f(x))$

$E(x)$ は $x=a$ で連続で, $E(a) = 0$

($\because$ $B(a)=0$ $D(f(a)) = D(b) = 0$)

定理 2.3 より $g\circ f$ は $x=a$ で微分可能で $(g\circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$

(コメント)

$$\times \quad \frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} = \frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)} \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

例 (対数微分法)

(1) $\alpha \in \mathbb{R}$ のとき $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

(2) $a > 0$ のとき $(a^x)' = a^x \log a$

(3) $(x^x)' = x^x(\log x + 1)$ $(x > 0)$

<u>証明</u> (1) $y=x^{\alpha}\ (x>0)$ とする。 $\log y = \log x^{\alpha} = \alpha \log x$

両辺を x について微分すると、

$$\frac{y'}{y} = \alpha\cdot\frac{1}{x} \iff y' = y\cdot\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

(3) $y=x^{x}\ (x>0)$ とする. $\log y = \log x^{x} = x\log x$

両辺 x で微分

$$\frac{y'}{y} = \log x + 1 \iff y' = y(\log x + 1) = x^{x}(\log x + 1)$$

<u>定理 2.5</u> (逆関数の微分法)

$y=f(x)$ が 関数 I 上の狭義単調な微分可能な関数ならば逆関数 $x=f^{-1}(y)$ は、

$\underbrace{f'(x)}_{f'(f^{-1}(y))} \neq 0$ となる $y\in f(I)$ で微分可能で

$$\frac{d}{dy}f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

<u>例</u> (逆三角関数の導関数)

(1) $(\sin^{-1}x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1<x<1)$

(2) $(\cos^{-1}x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1<x<1)$

(3) $(\tan^{-1}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ $(x\in\mathbb{R})$

<u>証明</u> (1) $y=\sin^{-1}x$ $(-1<x<1)$ とする. $x=\sin y$ $\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$

$\frac{dx}{dy} = \cos y > 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(3) $y=\tan^{-1}x$ とすると $x=\tan y$ $\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1+\tan^2 y = 1+x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+x^2}$$

高階導関数

f：区間 I で微分可能とする.

・更に f' が I で微分可能であるとき f は I で2回微分可能であるといい f' の導関数を f の2階導関数といい, f'' と書く.

以下同様にして、$y=f(x)$ の n 階導関数が定義され $f^{(n)}$, $\dfrac{d^n f}{dx^n}$, $y^{(n)}$, $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ などと書く.
（$f^{(0)}=f$ と約束する）

$f^{(n)}$ が存在するとき、f は n 回微分可能であるという。

・f が区間 I で n 回微分可能で、$f^{(n)}$ が I で連続であるとき、f は I で C^n 級 又は n 回連続微分可能であるという.

f が I で何回でも微分可能であるとき、f は I で C^∞ 級であるという.

定理 2.6（ライプニッツの公式）

f, g：区間 I で n 回微分可能とすると、

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x))=\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x) \quad (x\in I)$$

ここで ${}_nC_k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $0!=1$

注 $n=1$ のとき、積の微分の公式 $(fg)'=f'g+fg'$
証明は n に関する帰納法（積の微分の公式を使う）

例 $f(x)=x^2e^x$ に対して $f^{(n)}(x)$ を求める. $(n\geqq 2)$

解答 $(x^2)'=2x$, $(x^2)''=2$, $\dfrac{d^k}{dx^k}(x^2)=0$ $(k\geqq 3)$

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x)&=\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (x^2)^{(k)}(e^x)^{(n-k)}\\
&=\sum_{k=0}^{2} {}_nC_k (x^2)^{(k)}\cdot e^x\\
&={}_nC_0\, x^2e^x+{}_nC_1(2x)e^x+{}_nC_2\cdot 2\cdot e^x\\
&=(x^2+2nx+n(n-1))e^x
\end{aligned}$$

2.2 平均値の定理、テイラーの定理、ロピタルの定理

定理 2.7（ロルの定理）

関数 f が閉区間 $[a,b]$ で連続、開区間 (a,b) で微分可能で、$f(a)=f(b)$ とする.
このとき、

$$a<c<b \quad かつ \quad f'(c)=0$$

となる数 c が存在する.

証明

f が定数関数の場合は自明（∵ $f'(x)=0$, $\forall x\in(a,b)$ だから）

以下、f は定数関数でないとする.

(i) $\exists x\in(a,b)$ s.t. $f(x)>f(a)=f(b)$ …(＊)
のときを考える.

fは閉区間「a,b]上連続なので、ある $c\in[a,b]$ で最大値をとる。

(*)より $a<c<b$ である。

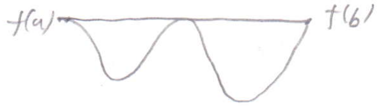
$f'(c)=0$ を示す。

$f(c)$は最大値なので

$x>c$ ならば $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\leqq 0$, $x\to c+0$ として $f'(c)\leqq 0$

$x<c$ ならば $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\geqq 0$, $x\to c-0$ として $f'(c)\geqq 0$

以上より $f'(c)=0$



(ii) (*)が成立しないときは

$\exists x\ (a,b)$ s.t. $f(x)<f(a)=f(b)$

fが$[a,b]$において最小値をとる $c\ [a,b]$ について、同様の方法で $f(c)=0$ が示される。

定理(2.8)(平均値の定理)

関数fが閉区間$[a,b]$で連続、開区間(a,b)で微分可能とする。

このとき、 $x<c<b$ かつ $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

をみたす数cが存在する。

証明 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ $(x\in[a,b])$ とする。

$F(x)$は$[a,b]$上連続、(a,b)上微分可能で $F(a)=F(b)$

ロルの定理より、$\exists c\in(a,b)$ s.t. $\underbrace{F'(c)}_{f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}=0$

定理2.9

fは$[a,b]$で連続、(a,b)で微分可能とする。

(1) $\forall x\in(a,b)$, $f'(x)=0 \Rightarrow f(x)$は$[a,b]$上の定数関数

(2) $\forall x\in(a,b)$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$は$[a,b]$上狭義単調増加

(3) $\forall x\in(a,b)$, $f'(x)<0 \Rightarrow$ 〃 〃 狭義単調減少

証明

$a\leqq x_1<x_2\leqq b$ となる x_1, x_2 を任意にとる。

平均値の定理より

$x_1<c<x_2$ かつ $f(x_2)-f(x_1)=\underbrace{f'(c)}_{\text{符号}}\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0}$

となるcが存在する。

これより(1)〜(3)が従う。

定理 2.10（テイラーの定理）　$a \neq b$ とする。

$a < b$ のとき f は閉区間 $[a,b]$ 上 C^{n-1} 級で開区間 (a,b) で n 回微分可能とする。
$a > b$　〃　〃　$[b,a]$　〃　〃　(b,a)　〃　〃

このとき、

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

をみたす「a と b の間の数 c $(c \neq a, b)$」が存在する。

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

と書き（ラグランジュの）剰余項という。

注　a と b の間の数 c $(c \neq a, b)$ は

$$c = a + \theta(b-a) \quad (0 < \theta < 1)$$

と表される。

剰余項は

$$R_n = \frac{f(a+\theta(b-a))}{n!}(b-a)^n \quad (0 < \theta < 1)$$ とも表される。

注　$n=1$ のとき テイラーの定理は平均値の定理

証明

$a < b$ のときに示す。定数 A を以下で定める。

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{A}{n!}(b-a)^n \cdots ①$$

$\exists c \in (a,b)$ s.t. $A = f^{(n)}(c)$ を示す。

$$F(x) = f(b) - \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{k}(x)}{k!}(b-x)^k + \frac{A}{n!}(b-x)^n \right\}$$ $x \in [a,b]$ とする

$F(x)$ は $[a,b]$ で連続、(a,b) で微分可能で、$F(a) = F(b)$ （∵①より）

ロルの定理より、$\exists c \in (a,b)$ s.t. $F'(c) = 0$

$$F'(x) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1}}_{+\sum_{k=0}^{n-2} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k} + \frac{A}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}$$

$$= -\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + \frac{A}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}$$

$$F'(c) = 0 \iff -\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(b-c)^{n-1} + \frac{A}{(n-1)!}(b-c)^{n-1} = 0 \iff A = f^{n}(c)$$

系 $a\in\mathbb{R}$ Iを $a\in I$となる区間とする.
fが区間Iでn回微分可能であるとする.
$\forall x\in I$に対して $0<\theta<1$ かつ

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n)}(a+\theta(b-a))}{n!}(x-a)^n$$

をみたすθが存在する。(これはテイラーの定理とよばれる)
($\because$ 定理2.10を$[a,x]$又は$[x,a]$で適用すればよい。)
特に$a=0$のとき上は

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

となる. これを(特別に)マクローリンの定理ということがある.

注意 θはnとxに依存して決まる数である.
fがIでC^∞級のとき,

$$\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n\to 0\quad(n\to\infty)$$

となる$x\in I$に対して,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

と表される。

これをfのaにおけるテイラー展開という。
特に$a=0$のとき、マクローリン展開という。 $\leftarrow$ $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

例(テイラーの定理の適用例) $n\in\mathbb{N}$とする $a=0$のときを考える(マクローリンの定理)

(1) $\forall x\in\mathbb{R}$ $\exists\theta\in(0,1)$ s.t. $e^x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}+\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n$

(2) $\forall x\in\mathbb{R}$ $\exists\theta\in(0,1)$ s.t. $\sin x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\frac{(-1)^n\cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

(3) $\forall x\in\mathbb{R}$ $\exists\theta\in(0,1)$ s.t. $\cos x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+\frac{(-1)^n\cos\theta x}{(2n)!}x^{2n}$

(4) $\forall x>-1$ $\exists\theta\in(0,1)$ s.t. $\log(1+x)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k+\frac{(-1)^{n-1}}{n(1+\theta x)^n}x^n$

(5) $\alpha\in\mathbb{R}$とする $\forall x>-1$ $\exists\theta\in(0,1)$ s.t.

$$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{\alpha}{k}x^k+\binom{\alpha}{n}(1+\theta x)^{\alpha-n}x^n\quad ここで\ \binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

確認1 (1) $f(x)=e^x$ $(x\in\mathbb{R})$ とする。f は $\mathbb{R}$ 上 C^∞ 級で $\forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して

$f^{(k)}(x)=e^x$ $f^{(k)}(0)=1$

$\exists\theta\in(0,1)$ s.t. $f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}+\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n$

補足 $\forall x\in\mathbb{R}$ $\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n\longrightarrow 0$ $(n\to\infty)$

$$\left(\because \left|\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n\right|\leq\frac{|x|^n}{n!}e^{|\theta x|}\leq\frac{|x|^n}{n!}e^{|x|}\longrightarrow 0\ (n\to\infty)\right)$$

$(\because 0<\theta<1)$ $\left(\forall a>0,\ \frac{a^n}{n!}\to 0\ (n\to\infty)\right)$

$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ $(\forall x\in\mathbb{R})$ が成立。

定理2.11 (コーシーの平均値の定理)

f,g：閉区間 $[a,b]$ で連続、開区間 (a,b) で微分可能とする。

$g'(x)\neq 0$ $[\forall x\in(a,b)]$ とする。

このとき $g(a)\neq g(b)$ で

$$a<c<b \text{ かつ } \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\quad\cdots(*)$$

をみたす c が存在する。

証明 $F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\{g(x)-g(a)\}$ とする。

$F(x)$ はロルの定理の仮定をみたすことがすぐにわかり、

$\exists c\in(a,b)$ s.t. $F'(c)=0 \Longleftrightarrow (*)$

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$$

不定形の極限

定理2.12 (ロピタルの定理)

$f(x)$ と $g(x)$ は $x=a$ 以外の a の近くの全ての点で定義されていて ($x=a$ を除いて) 微分可能であるとする。

$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ …… ①

又は

$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty$ …… ②

であるとし、極限 $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するとする。

このとき、極限 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ が存在し、$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

注 片側極限 $x\to\pm\infty$ のときも同様のことが成立。

注 ロピタルの定理は不定形のとき以外は適用できない。

ロピタルの定理の証明

$$\begin{cases} \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \cdots ① \\ \alpha = \lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \text{ が存在する。} \end{cases}$$

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ ---②
のときは略
(例えば、難波 定理 2.19)

$\Rightarrow \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ を示す。

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & (x \neq a) \\ 0 & (x = a) \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x) & (x \neq a) \\ 0 & (x = a) \end{cases}$$

とすると ①より $F(x), G(x)$ は a のまわりで連続、a 以外で微分可能
$x \neq a$ のとき、コーシーの平均値の定理より、x と a の間の数 c ($c \neq a, x$) が存在して、

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdots ③$$

$x \to a$ のとき、$c \to a$ なので、③で $x \to a$ として

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$$

例 (1) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^k}{e^x} = 0$ $(k \in \mathbb{N})$ (2) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\log x}{x^\alpha} = 0$ $(\alpha > 0)$

(3) $\lim_{x\to+0} x^\alpha \log x = 0$ $(\alpha > 0)$

2.3 微分の応用(1変数)

極値

定義 $f(x)$ を区間上の関数とする。$c \in I$ で c は I の端点ではないとする。
$f(x)$ が点 c で極大(極小)であるとは、
ある $\delta > 0$ が存在して、$0 < |x-c| < \delta$ となる全ての x に対して

$$f(x) < f(c) \quad (f(x) > f(c))$$

をみたすこと
$f(c)$ を極大値(極小値)という。極大値と極小値をあわせて極値という。

定理 2.13
c のまわりで定義された関数 $f(x)$ が点 c で極値をとり、c で微分可能
$\Rightarrow f'(c) = 0$
(逆は成立しない)

証明 $f(x)$ が $x = c$ で極値をとるとき、
ある $h > 0$ に対して $f(x)$ は $[c-h, c+h]$ において $x = c$ で最大値又は最小値をとる。
ロルの定理の証明と同様に $f'(c) = 0$

定理2.14
fを区間I上の関数とし $c\in I$とする。ある$h>0$が存在してfが$(c+h, c-h)$が連続で、$(c-h, c)$と$(c, c+h)$で微分可能とする。
$\forall x\in(c-h, c)$に対して $f'(x)>0$ [$f'(x)<0$]
$\forall x\in(c, c+h)$に対して $f'(x)<0$ [$f'(x)>0$]
であるとする。
このときfは点cで極大[極小]である。

証明 ── の場合に示す。

・$x\in(c-h, c)$とする。
$[x, c]$で平均値の定理を用いると $\exists\, \xi\in(x, c)$ s.t.

$$f(c)-f(x)=\underbrace{f'(\xi)}_{>0}(c-x)>0 \qquad \therefore f(x)<f(c)$$

・同様に $x\in(c, c+h)$のとき、$f(x)<f(c)$
fは$x=c$で極大

定理2.15 $n\in\mathbb{N}$, $n\geqq 2$とする。
関数fは$x=c$の周りでC^n級で
$f^{(k)}(c)=0$, $(1\leqq k\leqq n-1)$, $f^{(n)}(c)\neq 0$ とする。
(1) nが偶数のとき、
・$f^{(n)}(c)>0 \Rightarrow f$は$c$で極小
・$f^{(n)}(c)<0 \Rightarrow f$は$c$で極大
(2) nが奇数のとき、fはcで極値をとらない。

証明 (I) $f^{(n)}(c)>0$のとき
$f^{(n)}$の連続性より、cの十分近くでは $f^{(n)}(x)>0$ 問題1.9
$x\neq c$でxがcに十分近いとき、テイラーの定理より、
cとxの間の数ξ ($\xi\neq c, x$) が存在して、

$$f(x)-f(c)=\underbrace{\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}}_{>0}\underbrace{(x-c)^n}_{\text{符号}} \qquad (① \because f'(c)=\cdots=f^{(n-1)}(c)=0)$$

(1) nが偶数のとき、
$x\neq c$でxがcに十分近いとき、
$(x-c)^n>0$なので、①より $f(x)-f(c)>0$ $\therefore$ fはcで極小
(2) nが奇数のとき、

$$\left.\begin{array}{l}\cdot\ x<c\text{のとき、}(x-c)^n<0\text{なので、①より、}f(x)-f(c)<0\\ \cdot\ x>c\text{のとき、}(x-c)^n>0\text{なので、①より }f(x)-f(c)>0\end{array}\right\} f\text{は}c\text{で極値をとらない。}$$

(II) $f^{(n)}(c)<0$のときも同様.

凹凸

定義　関数fが区間Iで凸又は下に凸であるとは以下が成り立つこと。

$\forall x_1, x_2 \in I$　$\forall t(0,1)$に対して

$f(tx_1+(1-t)x_2) \leqq tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$

「$\leqq$」のかわりに「$<$」が成り立つとき、fはIで狭義に凸であるという。

・fがIで凹又は上に凸であるとは

$-f(x)$がIで凸であること。

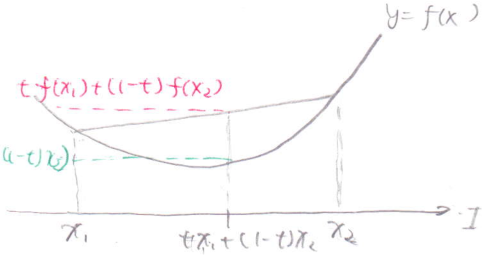
注　fが区間Iで凸ということは

$\forall x_1, x_2 \in I$　$x_1<x_2$のとき、区間$[x_1, x_2]$で

$y=f(x)$のグラフは

点$(x_1, f(x_1))$と点$(x_2, f(x_2))$を結ぶ線分より

下にあることを意味する。



定理2.16　fがIで2回微分可能とする。

(a) fがIで凸 $\Longleftrightarrow$ (b) $\forall x \in I$に対して$f''(x) \geqq 0$

証明 (a)$\Rightarrow$(b)を示す。

$x_1<x_2$となる$x_1, x_2 \in I$を任意にとる。$f'(x_1) \leqq f'(x_2)$を示す。

$x \in (x_1, x_2)$を任意にとり、

$x=tx_1+(1-t)x_2$　$0<t<1$となるtをとる。

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = \frac{f(tx_1+(1-t)x_2)-f(x_1)}{tx_1+(1-t)x_2-x_1} \underset{\uparrow\ f\text{が凸}}{\leqq} \frac{tf(x_1)+(1-t)f(x_2)-f(x_1)}{(1-t)(x_2-x_1)}$$

$$= \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$x \to x_1+0$とすると、

$$f'(x) \leqq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \cdots ①$$

同様に $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqq \dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$ が示されるので、

$x \to x_2-0$として　$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqq f'(x_2) \cdots ②$

①, ②より　$f'(x_1) \leqq f'(x_2)$　　$\therefore f'$はIで単調増加

$f''(x) \geqq 0$ $(\forall x \in I)$

(b)$\Rightarrow$(a)を示す。

$f''(x) \geqq 0$ $(\forall x \in I)$なので、f'はIで単調増加

$x_1<x_2$となる$x_1, x_2 \in I$を任意にとり、$t \in (0,1)$を任意とする。

$t f(x_1) + (1-t) f(x_2) - f(t x_1 + (1-t) x_2)$

$= t\{f(x_1) - f(t x_1 + (1-t) x_2)\} + (1-t)\{f(x_2) - f(t x_1 + (1-t) x_2)\}$

平均値の定理より $x_1 < {}^\exists \xi_1 < t x_1 + (1-t) x_2 < {}^\exists \xi_2 < x_2$ s.t.

$= t f'(\xi_1)\{x_1 - (t x_1 + (1-t) x_2)\} + (1-t) f'(\xi_2)\{x_2 - (t x_1 + (1-t) x_2)\}$

$= t(1-t)\{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)\}(x_2 - x_1) > 0$ （f'が増加）

fはIで凸

定義

$f(x)$は$x=a$のまわりで定義されているとする。ある$h>0$に対して

- fが$(a-h, a)$で凸、$(a, a+h)$で凹

 又は

- fが 〃 で凹、 〃 で凸

であるとき、

点$(a, f(a))$はfの変曲点であるという。

定理2.17 fがaのまわりでC^2級とする。

点$(a, f(a))$がfの変曲点 $\Rightarrow f''(a) = 0$

（証明には定理2.16を使う） f''の連続性

定理2.18 fはaのまわりでC^2級とする

ある$h>0$に対して

- $a-h < x < a$のとき $f''(x) > 0$、$a < x < a+h$のとき $f''(x) < 0$

 又は

- 〃 $f''(x) < 0$、 〃 $f''(x) > 0$ とする。

このとき点$(a, f(a))$はfの変曲点である。