数学I・A

0 序章

R：実数全体　N：自然数全体　Z：整数全体　Q：有理数全体

区間
$$\left.\begin{aligned}(a,b)&=\{x \mid a<x<b\}\\(a,\infty)&=\{x \mid x>a\}\\(-\infty,b)&=\{x \mid x<b\}\end{aligned}\right\}\leftarrow\text{開区間}$$
$$\left.\begin{aligned}[a,b]&=\{x \mid a\leqq x\leqq b\}\\[a,\infty)&=\{x \mid x\geqq a\}\\(-\infty,b]&=\{x \mid x\leqq b\}\end{aligned}\right\}\leftarrow\text{閉区間}$$

論理記号

$\forall$ と $\exists$

for any, for all　　There exists

X：集合とする。

「任意の $a\in X$ に対して、命題 $P(a)$ が成り立つ」ということを、

$\forall a\in X,\ \underbrace{P(a)}_{\text{文章}}$

「ある $a\in X$ が存在して、命題 $P(a)$ が成り立つ」ということを、

$\exists a\in X,\ P(a)$　または、　$\exists a\in X$ s.t. $P(a)$　と書く。

such that

例えば、$\forall x\in[-1,1],\ x^2\leqq 1$

$\exists x\in[-1,1]$ s.t. $x^2\leqq\frac{1}{4}$

NO. 2

DATE

1 極限と連続性

1.1 実数

$\mathbb{R}$は四則演算と大小関係がある。

三角不等式

$\forall x, y \in \mathbb{R}$に対して、

(1) $|x+y| \leqq |x| + |y|$

(2) $\big||x| - |y|\big| \leqq |x-y|$

証明 (1) $-|x| \leqq x \leqq |x|$

$-|y| \leqq y \leqq |y|$

$-|x| - |y| \leqq x + y \leqq |x| + |y|$

$|x+y| \leqq |x| + |y|$

(2) (1)より、

$|x| = |y + (x-y)|$

$\leqq |y| + |x-y|$

$|x| - |y| \leqq |x-y|$

同様に、$|y| - |x| \leqq |y-x| = |x-y|$

$\big||x| - |y|\big| \leqq |x-y|$

定義 (有界性、上界、下界)　　$E \in \mathbb{R}$とする。

(1)・「ある$k \in \mathbb{R}$が存在して、全ての$x \in E$に対して、$x \leqq k$」が成り立つとき、

($\exists k \in \mathbb{R}$ s.t. $\forall x \in E$、$x \leqq k$)

Eは上に有界であるという。

・$k \in \mathbb{R}$が「全ての$x \in E$に対して$x \leqq k$」をみたすとき、

kはEの上界であるという。

(2)「$\exists k \in \mathbb{R}$ s.t. $\forall x \in E$に対して$x \geqq k$」が成り立つとき、

Eは下に有界であるという。

$k \in \mathbb{R}$が「$\forall x \in E$、$x \geqq k$」をみたすとき、kはEの下界であるという。

(3) Eが上にも下にも有界のとき、Eは有界であるという。注 上界や下界が存在したら、それらは無数になる。

例 ・$E = (-\infty, 0]$とするとEは、上に有界だが、下に有界ではない。

・$E = [0, \infty)$とすると、Eは下に有界だが、上に有界ではない。

・$E = [0, 1]$は有界

定義（最大値、最小値）$E \in \mathbb{R}$とする.

・Eの元で最大のものが存在するとき、その数をEの最大値という。
・〃　最小　〃　〃　〃　最小値という。

注 $E \in \mathbb{R}$の最大値や最小値は存在するとは限らない.
↑たとえ有界であっても

例えば
$E=(0,1)$

定義（上限、下限）$E \in \mathbb{R}$とする.

(1) 以下をみたす$\alpha \in \mathbb{R}$が存在するとき、αはEの上限であるといい、$\sup E$と書く。

(i) $\forall x \in E$、$x \leq \alpha$
(ii) $\forall \varepsilon > 0$、$\exists x_0 \in E$ s.t. $\alpha - \varepsilon < x_0$

注 αがEの上限 $\Longleftrightarrow$ αはEの最小の上界

∵ (i)はαはEの上界
(ii)はαより小さい数はEの上界にはなり得ない.
ことを意味している。

(2) 以下をみたす$\beta \in \mathbb{R}$が存在するとき、
βはEの下限であるといい、$\inf E$と表す。

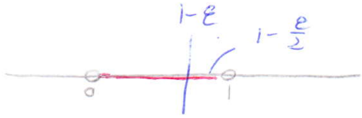
(i) $\forall x \in E$、$x \geq \beta$
(ii) $\forall \varepsilon > 0$、$\exists x_0 \in E$ s.t. $x_0 < \beta + \varepsilon$.

注 βがEの下限 $\Longleftrightarrow$ βがEの最大の下界

例 $E=(0,1)$のとき、$\sup E = 1$　$\inf E = 0$

∵ (i) $\forall x \in E$に対して、$x \leq 1$は自明
(ii) $0<\varepsilon<1$を任意とする。

$$1-\varepsilon < \underbrace{1-\frac{\varepsilon}{2}}_{x_0} \in (0,1)$$



公理（実数の連続性公理）　← 認めるもの.

$E \in \mathbb{R}$が上に有界で、$E \neq \phi$ならば Eの上限が（$\mathbb{R}$の中に）存在する.

注意 $E \in \mathbb{R}$が下に有界で $E \neq \phi$ $\Rightarrow$ Eの下限が（$\mathbb{R}$の中に）存在する。

∵ Eが下に有界なら、$E' = \{-x \mid x \in E\}$は上に有界になり、

$$\inf E = \underline{-\sup E'}$$
↖存在.

なので、公理から、$\inf E$が存在。

・Eが上に有界でないときは、$\sup E = \infty$と書く。
・Eが下に有界でないときは、$\inf E = -\infty$と書く。

注 ・$\max E$が存在 $\Rightarrow$ $\max E = \sup E \in \mathbb{R}$
・$\min E$が存在 $\Rightarrow$ $\min E = \inf E \in \mathbb{R}$

定理 1.1 (アルキメデスの原理)

$\mathbb{N}$は上に有界ではない。

自然数全体

証明 (背理法)

$\mathbb{N}$が上に有界であると仮定する

$\alpha = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$が存在する。

上限の定義 (ii) で $\varepsilon = 1$ として、

$\exists m \in \mathbb{N}$ s.t. $\alpha - 1 < m \iff \alpha < m+1$

$m+1 \in \mathbb{N}$より、これはαが$\mathbb{N}$の上界であることに反する。

$\mathbb{N}$は上に有界ではない。

定理 1.1 (アルキメデスの原理)

$\mathbb{N}$は上に有界でない

このことは

$\forall a \in \mathbb{R}$、$\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $n > a$

を意味する。

集合の「元」とは「要素」のこと。

定理 1.2 (有理数の稠密性)

ちゅうみつ

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $\alpha < \beta$をみたす任意のα, βに対して、

$\alpha < q < \beta$となる有理数qが存在する。

証明

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha < \beta$とする。

アルキメデスの原理により、

$$\exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n > \frac{1}{\beta - \alpha} \iff \beta > \alpha + \frac{1}{n} \cdots (*)$$

アルキメデス

$\exists m \in \mathbb{N}$ s.t. $m > n\alpha$ かつ $m < -n\alpha$ $\quad -m < n\alpha < m$

$-m, -m+1, \cdots, m-1, m$のうち、$n\alpha$をはじめて超えるものを$k \in \mathbb{Z}$とすると、

$$k - 1 \leqq n\alpha < k \Rightarrow \alpha < \underbrace{\frac{k}{n}}_{q} \leqq \alpha + \frac{1}{n} \underset{(*)}{<} \beta$$

有理数

1.2 数列の極限

定義 数列$\{a_n\}$がαに収束するとは以下が成り立つこと。

どんなに小さい$\varepsilon > 0$に対しても

> 任意の$\varepsilon > 0$に対してある$N \in \mathbb{N}$が存在して
> $n \geqq N$となる任意の$n \in \mathbb{N}$に対して、
> $|a_n - \alpha| < \varepsilon$
> が成り立つ。

[論理記号で書くと、
$\forall \varepsilon > 0$、$\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geqq N$、$|a_n - \alpha| < \varepsilon$]

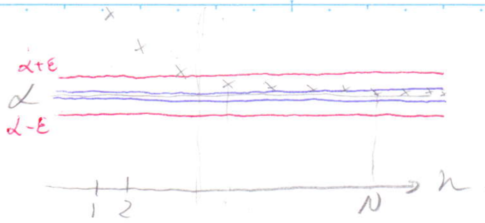
αを$\{a_n\}$の極限値といい

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \qquad a_n \to \alpha \ (n \to \infty)$

などと書く。

$\boxed{\varepsilon - N \text{論法}}$

$|\frac{1}{n}-0|=\frac{1}{n}<$



例 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

証明 $\varepsilon>0$ を任意にとる.

$N>\frac{1}{\varepsilon}$ となる $N\in\mathbb{N}$ をとる.

$\varepsilon>0$ に対してこの不等式が成り立つ N をみつける.

$^\forall n\geqq N$ に対して,

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{N}<\varepsilon$$

定理1.3 $\{a_n\}$ が収束するとき極限は唯一つに定まる.

証明 α と β がともに $\{a_n\}$ の極限値であるとする.
($\alpha=\beta$ を示せばよい)

(背理法) $\alpha\neq\beta$ とする.

$|\alpha-\beta|>0$ なので　($\varepsilon=\frac{|\alpha-\beta|}{2}>0$ とおいて)

$^\exists N_1\in\mathbb{N}$ s.t. $^\forall n\geqq N_1$, $|a_n-\alpha|<\frac{|\alpha-\beta|}{2}$

$^\exists N_2\in\mathbb{N}$ s.t. $^\forall n\geqq N_2$ $|a_n-\beta|<\frac{|\alpha-\beta|}{2}$

$N=\max\{N_1,N_2\}$ とすると,

$|\alpha-\beta|=|(\alpha-a_n)+(a_n-\beta)|\leqq|\alpha-a_n|+|a_n-\beta|<\frac{|\alpha-\beta|}{2}+\frac{|\alpha-\beta|}{2}=|\alpha-\beta|$

$|\alpha-\beta|<|\alpha-\beta|$ となり不合理

定義(発散) 数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき発散するという.

特に (1) 数列 $\{a_n\}$ が ∞ に発散するとは以下が成り立つこと

「$^\forall k\in\mathbb{R}$, $^\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $^\forall n\geqq N$ $a_n>k$」

このとき, $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ 又は, $a_n\to\infty$ $(n\to\infty)$ と書く.

(2) $\lim_{n\to\infty}(-a_n)=\infty$ であるとき, $\{a_n\}$ は $-\infty$ に発散するといい

$\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$ 又は, $a_n\to-\infty$ $(n\to\infty)$ と書く.

命題 $a_n>0$ のとき,

$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty \iff \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$ ← (確かめよ)

定義 ・数列 $\{a_n\}$ が上に有界であるということは, 集合 $\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ が上に有界であること.

〃 下に有界 〃 〃 下に有界 〃

〃 有界 〃 〃 有界 〃

つまり, 数列 $\{a_n\}$ が有界 $\iff$ $^\exists M>0$ s.t. $^\forall n\in\mathbb{N}$, $|a_n|\leqq M$

記号 $\sup_{n\in\mathbb{N}}a_n=\sup\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ $\inf_{n\in\mathbb{N}}a_n=\inf\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ と書く

定理1.4. 収束する数列は有界である.

証明 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であるとする.　($\varepsilon = 1$ として)

$\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geqq N$　$|a_n - \alpha| < 1$

$n \geqq N \Rightarrow |a_n| \leqq |\alpha| + |a_n - \alpha| < |\alpha| + 1$

$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$|a_n| \leqq \max\{|a_1|, \cdots |a_{N-1}|, |\alpha| + 1\}$

$|a_n|$ は有界

注意 定理1.4の逆は成立しない.

例えば $a_n = (-1)^n$ とすると、$\{a_n\}$ は有界だが収束しない。

定理1.5. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$、$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とすると、以下が成立.

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$　　(2) $\lim_{n\to\infty}(c a_n) = c\alpha$ (c は定数)

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

(4) $\alpha \neq 0$, $a_n \neq 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) ならば $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{\beta}{\alpha}$

証明 (1) $\varepsilon > 0$ を任意にとる.

$$\left.\begin{array}{l}\exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \geqq N_1 \quad |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists N_2 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \geqq N_2 \quad |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}\end{array}\right\} (*)$$

$N = \max\{N_1, N_2\}$ とすると、$\forall n \geqq N$ に対して

$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| \leqq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$

(3) $\varepsilon > 0$ を任意にとる.

$\{a_n\}$ は収束するので有界　$\exists M > 0$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$、$|a_n| \leqq M$

$|a_n b_n - \alpha\beta| = |a_n(b_n - \beta) + \beta(a_n - \alpha)|$

$\leqq |a_n||b_n - \beta| + |\beta||a_n - \alpha| \leqq M|b_n - \beta| + |\beta||a_n - \alpha| \cdots ①$

$\exists N_1 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geqq N_1$　$|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2(|\beta| + 1)}$

$\exists N_2 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geqq N_2$　$|b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2M}$

$N = \max\{N_1, N_2\}$ とすると、① より

$|a_n b_n - \alpha\beta| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |\beta| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|\beta| + 1)} \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

定理1.6. $\left.\begin{array}{l}\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqq b_n \\ \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \beta\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \leqq \beta$

証明 (背理法) $\alpha > \beta$ とする。 ($\varepsilon = \frac{\alpha-\beta}{2} > 0$ とおくと)

$\exists N_1 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geqq N_1 \quad |a_n - \alpha| < \frac{\alpha-\beta}{2}$ …… ①

$\exists N_2 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geqq N_2 \quad |b_n - \beta| < \frac{\alpha-\beta}{2}$ …… ②

$N = \max\{N_1, N_2\}$ とすると、

$$\alpha - \frac{\alpha-\beta}{2} \underset{①}{<} a_N \leqq b_N \underset{②}{<} \beta + \frac{\alpha-\beta}{2} \Rightarrow \alpha+\beta < \alpha+\beta \quad \text{不合理}$$

$\alpha \leqq \beta$

定理1.7. (はさみ打ちの原理)

(1) $\left.\begin{array}{l}\cdot\ \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqq b_n \leqq c_n \\ \cdot\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha\end{array}\right\} \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$

(2) $\left.\begin{array}{l}\cdot\ \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqq b_n \\ \cdot\ \lim_{n\to\infty} a_n = \infty\end{array}\right\} \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

証明 (1) $\varepsilon > 0$ を任意にとる。

$\exists N_1 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geqq N_1 \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon \quad \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$ … ①

$\exists N_2 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geqq N_2 \quad |c_n - \alpha| < \varepsilon \quad \alpha - \varepsilon < c_n < \alpha + \varepsilon$ … ②

$N = \max\{N_1, N_2\}$ とすると。 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、

$\alpha - \varepsilon \underset{①}{<} a_n \leqq b_n \leqq c_n \underset{②}{<} \alpha + \varepsilon \qquad |b_n - \alpha| < \varepsilon$

$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$

命題 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha|$

($\because\ 0 \leqq ||a_n| - |\alpha|| \leqq |a_n - \alpha| \to 0 \quad (n \to \infty)$)

定義 ・$a_n \leqq a_{n+1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) を満たす数列を(単調)増加列という。

・$a_n \geqq a_{n+1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) を満たす数列を(単調)減少列という。

・増加列と減少列を合わせて単調数列という。

定理1.8. (1) 上に有界な増加列 $\{a_n\}$ は、$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ に収束する。

(2) 下に有界な減少列 $\{a_n\}$ は $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$ に収束する。

(3) 上に有界でない増加列は ∞ に発散する。

(4) 下に有界でない減少列は $-\infty$ に発散する。

証明 (1) $\{a_n\}$ を上に有界な増加列とする。

実数の連続性公理より、$\alpha = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}$ が存在する

$\varepsilon > 0$ を任意にとる。

上限の定義 $\longrightarrow \begin{cases} \cdot\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqq \alpha \\ \cdot\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \alpha - \varepsilon < a_N \end{cases}$

$\{a_n\}$は増加列なので、

$\forall n \geqq N \quad \alpha - \varepsilon < a_N \leqq a_n \leqq \alpha < \alpha + \varepsilon$

$\therefore \forall n \geqq N,\ |a_n - \alpha| < \varepsilon \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$

例 $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ とすると、$\{a_n\}$は収束する

$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ と書き、eをネイピア数という。$e = 2.718\cdots$

証明 $\{a_n\}$が上に有界な増加列であることを示す。

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{\uparrow\ \text{二項定理}}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\cdots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \cdots (*)$$

$$a_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\times\cdots\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

$$= \underbrace{1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)}_{> a_n} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)}_{>0}$$

$> a_n$.

$\{a_n\}$は増加列

$(*)$より、

$$a_n \leqq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leqq 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 + 2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} < 3$$

$\{a_n\}$は上に有界な増加列となり収束する。

数列$\{a_n\}$の一部の項を無限個取り出して順序を変えないで並べたものを$\{a_n\}$の部分列という。

$\{a_n\}$の部分列は自然数の増加列 $n_1 < n_2 < n_3 \cdots\cdots \to \infty$ を用いて

$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, a_{n_4} \cdots$

つまり、$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ と表される。

例えば、$\{\underbrace{a_{2k}}_{n=2k}\}$、$\{\underbrace{a_{2k-1}}_{n=2k-1}\}$ は$\{a_n\}$の部分列

注 $\{a_n\}$がαに収束するなら、$\{a_n\}$の任意の部分列はαに収束する

定理1.9（ボルツァノ・ワイエルストラスの定理）
有界な数列は収束する部分列を含む。
（つまり、有界な数列から適当な部分列をとれば収束する。）
具体例　$a_n=(-1)^n$ とすると、$\{a_n\}$ は有界だが、収束しない
$a_{2k}=1$　$(\forall k\in\mathbb{N})$　$\lim_{k\to\infty}a_{2k}=1$　$\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ は収束している。
証明は後
定理1.10（コーシーの判定条件）
・数列 $\{a_n\}$ が収束する
$\Longleftrightarrow$ ・$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall m,n\geqq N,\ |a_m-a_n|<\varepsilon$ $\cdots$ (C)
定義　(C)をみたす数列 $\{a_n\}$ をコーシー列又は基本列という。
(C)を形式的に $\lim_{m,n\to\infty}|a_m-a_n|=0$ と書くことができる。
証明 $(\Rightarrow)$ $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ とする。　$\varepsilon>0$ を任意にとる。
$\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n\geqq N$　$|a_n-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$
$m,n\geqq N$ ならば
$|a_m-a_n|\leqq|a_m-\alpha|+|\alpha-a_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ $\cdots$ (C) が成立。
$(\Leftarrow)$ (C)が成り立つとする。
(i) $\{a_n\}$ が有界であることを示す。
(C)で $\varepsilon=1$ として、$\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall m,n\geqq N$　$|a_m-a_n|<1$
$m=N$ として　$\forall n\geqq N$　$|a_N-a_n|<1$
$n\geqq N$ ならば
$|a_n|\leqq|a_n-a_N|+|a_N|<1+|a_N|$
$\forall n\in N$ に対して、$|a_n|\leqq\max\{|a_1|,\cdots,|a_{N-1}|,1+|a_N|\}$
$\therefore\{a_n\}$ は有界。
(ii) $\{a_n\}$ が収束することを示す
$\varepsilon>0$ を任意にとる
(C)より、$\exists N'\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall m,n\geqq N'$　$|a_m-a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$　$\cdots$ ①
$\{a_n\}$ は有界なので、定理1.9より $\{a_n\}$ のある部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が収束する。
$\alpha=\lim_{k\to\infty}a_{n_k}$ とすると、
$\exists l\in\mathbb{N}$ s.t.　$|a_{n_l}-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$，$n_l\geqq N'$　$\cdots$ ②
$\leftarrow$ ($n_k\nearrow\infty$ $(k\to\infty)$ より)

①,②より、$\forall n\geqq N'$ に対して、
$|a_n-\alpha|\leqq|a_n-a_{n_l}|+|a_{n_l}-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$
$\therefore\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$

$a_n=(-1)^n$
$|a_{n+1}-a_n|=2$　$(\forall n\in\mathbb{N})$　$\Rightarrow$ 収束しない
$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ とすると、$\{a_n\}$ は収束しない。

1.3. 関数の極限（1変数）

$D \subset \mathbb{R}$ とし、D を定義域とする関数 $y=f(x)$ に対して「f は D 上の関数」などという。

$f(D)=\{f(x) \mid x \in D\}$ を f の値域という。

☒ $x \to a$ のときの極限（$a \in \mathbb{R}$）

ここでは関数 f は $x=a$ の十分近くで定義されていて点 a では定義されていてもいなくてもよいとする。

（つまり、ある開区間 I が存在して、$a \in I$ で $I \setminus \{a\}$ が f の定義域に含まれるとする

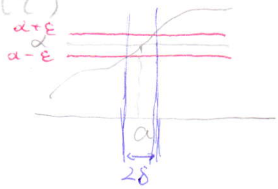
$A \setminus B = \{x \mid x \in A,\ x \notin B\}$）

（$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$）

定義 関数 $f(x)$ が $x \to a$ のとき α に収束するとは以下が成り立つこと。

$$\forall \varepsilon > 0,\ ^{\exists}\delta > 0 \ \text{s.t.}\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-\alpha| < \varepsilon$$

（$0 < |x-a| < \delta$ となる任意の x に対して）



このとき、α を $x \to a$ のときの $f(x)$ の極限値という

注意 極限値が存在すれば唯一つ。

$f(x)$ が $x \to a$ のときに収束しないとき、発散するという。

定義 (1) $f(x)$ が $x \to a$ のとき ∞ に発散するとは、

$$\forall k \in \mathbb{R},\ ^{\exists}\delta > 0,\ \text{s.t.}\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > k$$

が成り立つこと。

(2) $f(x)$ が $x \to a$ のとき $-\infty$ に発散するとは、

$\lim_{x \to a}(-f(x)) = \infty$ ことをいう。

問 $\lim_{x \to a} x^3 = a^3$

定理 1.11 (A) $x \to a$ のとき、$f(x)$ が α に収束する。

$\iff \lim_{n \to \infty} x_n = a$ かつ $x_n \neq a$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ⋯ $(*)$

を満たす任意の数列 $\{x_n\}$ に対して、数列 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束する。

証明 (A) ⇒ (B) を示す。 $(*)$ を満たす数列 $\{x_n\}$ を任意にとる。

$\varepsilon > 0$ を任意にとる。

(A)より、$^{\exists}\delta > 0$ s.t. $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-\alpha| < \varepsilon$ ⋯ ①

$(*)$より、$^{\exists}N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geq N$, $0 < |x-a| < \delta$ ⋯ ②

①, ②より、$n \geq N$ ならば、$|f(x_n) - \alpha| < \varepsilon$

$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha$

(B) ⇒ (A) を示す。（背理法） (B)が成立するとする。

$f(x) \not\to \alpha$ $(x \to a)$ であるとする。

? $^{\exists}\varepsilon_0 > 0$ s.t. $\forall \delta > 0$, $^{\exists}\tilde{x}$ s.t. $0 < |\tilde{x} - a| < \delta$ かつ $|f(\tilde{x}) - \alpha| \geq \varepsilon_0$

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して（$\delta = \frac{1}{n}$ として）$^{\exists}x_n$ s.t. $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ かつ $|f(x_n) - \alpha| \geq \varepsilon_0$

数列 $\{x_n\}$ を考える。

$\lim_{n \to \infty} x_n = a$ かつ $x_n \neq a$ $(n \in \mathbb{N})$ なので、(B)より、$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha$ でなければならない。

これは、$|f(x_n) - \alpha| \geq \varepsilon_0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ に反する。

$\therefore \lim_{x \to a} f(x) = \alpha$

注意 定理1.11について補足

「(*)をみたす任意の数列$\{x_n\}$に対して、数列$\{f(x_n)\}$が収束する」 ↙極限を明示していない。

ならば、$\lim_{n\to\infty} f(x_n)$の値は、(*)をみたす数列$\{x_n\}$のとり方に依らず定まる。

∵ $\{x_n\}\{y_n\}$が(*)をみたすとする。

$\{x_n\}$と$\{y_n\}$の項を交互に並べてできる数列を$\{z_n\}$とする。

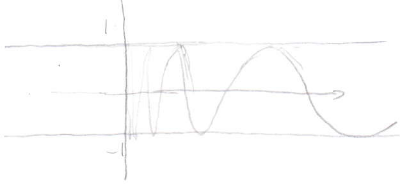
($z_{2m-1}=x_m$, $z_{2m}=y_m$ である)

このとき、$z_n \to a$, $z_n \neq a$ なので、(*)より、

$\alpha = \lim_{n\to\infty} f(z_n)$が存在する。

$\{f(x_n)\}$と$\{f(y_n)\}$は$\{f(z_n)\}$の部分列なので、

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \alpha$



例 $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$は存在しない。

証明 $a_n = \frac{1}{n\pi}$とすると、$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\sin\frac{1}{a_n} = \sin n\pi = 0 \quad ({}^\forall n \in \mathbb{N})$

$b_n = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ とすると、$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

$\sin\frac{1}{b_n} = \sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad ({}^\forall n \in \mathbb{N})$

$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{a_n} = 0 \quad \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{b_n} = 1$

異なる

$\lim_{x\to a} \sin\frac{1}{x}$は存在しない。

定理1.12 $a \in \mathbb{R}$ $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ とすると、以下が成立。

(1) $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \alpha+\beta$ (2) $\lim_{x\to a}(c f(x)) = c\alpha$ (cは定数)

(3) $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \alpha\beta$ (4) $\alpha \neq 0$のとき、$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\beta}{\alpha}$

(5) $\lim_{x\to a}|f(x)| = |\alpha|$

証明は定理1.11と数列の極限の性質からすぐに従う。

定理1.13 (1) 点a以外の aの十分近くで $f(x) \leqq g(x)$, $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ $\Rightarrow \alpha \leqq \beta$

(2) 点a以外の aの十分近くで $f(x) \leqq g(x) \leqq h(x)$, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \alpha$ $\Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = \alpha$

($\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ の定義)

${}^\forall \varepsilon > 0$, ${}^\exists \delta > 0$ s.t. $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-\alpha| < \varepsilon$

$0<|x-a|<\delta$ となる任意のxに対して $|f(x)-\alpha|<\varepsilon$

${}^\forall x \in (a-\delta, a+\delta)\setminus\{a\}$, $|f(x)-\alpha| < \varepsilon$

「極限 $\lim_{x\to a} f(x)$が存在する」とは $x\to a$ のとき$f(x)$が収束すること。

NO. 12

DATE

定理 1.14（コーシーの判定条件）

(A) $x \to a$ のとき $f(x)$ が収束する

$\Longleftrightarrow$ (B) $\forall \varepsilon > 0$、$\exists \delta > 0$ s.t.「$0 < |x-a| < \delta$、$0 < |x'-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$」

証明 (A)⇒(B)　$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ とする。

$\varepsilon > 0$ を任意にとる。

$\exists \delta > 0$ s.t.「$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$」

$0 < |x-a| < \delta$　$0 < |x'-a| < \delta$ ならば

$|f(x) - f(x')| \leqq |f(x) - \alpha| + |\alpha - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$　　(B) 成立。

(B)⇒(A)　(B) が成り立つとする。

$\varepsilon > 0$ を任意にとる。(B) での $\delta > 0$ をとる。

［定理 1.11 と次の注意より、
$\lim_{n \to \infty} x_n = a$、$x_n \neq a$ ($\forall n$) となる任意の数列 $\{x_n\}$ に対して
数列 $\{f(x_n)\}$ が収束することを示せばよい。］

$\lim_{n \to \infty} x_n = a$、$x_n \neq a$ ($\forall n$) となる数列を任意にとる。

$\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geqq N$、$0 < |x_n - a| < \delta$

$\forall m, n \geqq N$ に対して (B) より、($0 < |x_n - a| < \delta$、$0 < |x_m - a| < \delta$ より)

$|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$

$\{f(x_n)\}$ がコーシー列となり収束する。

㋐ 片側極限　$\lim_{x \to a+0} f(x)$　$\lim_{x \to a-0} f(x)$

定義 (1) α が $f(x)$ の点 a での右極限（左）であるとは、以下が成り立つこと。

$\forall \varepsilon > 0$、$\exists \delta > 0$ s.t.「$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$」

$0 < a - x < \delta$

このことを $\lim_{x \to a+0} f(x) = \alpha$ 又は、$f(x) \to \alpha$ ($x \to a+0$) と書く。

$\lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha$　　$f(x) \to \alpha$ ($x \to a-0$)

右極限と左極限を合わせて片側極限という。

$\lim_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty$　$\lim_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty$ も同様に定義される。

記号　$a = 0$ のとき

$x \to 0+0$ のことを $x \to +0$
$x \to 0-0$ のことを $x \to -0$
）と略記する。

命題　・極限 $\lim_{x \to a} f(x)$ が存在する。

$\Longleftrightarrow$ 片側極限 $\lim_{x \to a+0} f(x)$ と $\lim_{x \to a-0} f(x)$ がともに存在してこれらの値が等しい。

注意　片側極限に対しても定理 1.11〜1.14 に相当するものが成立する。

㋑ $x \to \infty$ のときと、$x \to -\infty$ のときの極限

関数 f がある無限区間 (c, ∞) で定義されているとする。

定義　$f(x)$ が $x \to \infty$ のとき α に収束するとは、以下が成り立つこと。

$\forall \varepsilon > 0$、$\exists L > c$ s.t. $\forall x \geqq L$、$|f(x) - \alpha| < \varepsilon$

このことを $\lim_{x\to\infty} f(x)=\alpha$ 又は $f(x)\to\alpha\ (x\to\infty)$ と書く。

定義 (1) $f(x)$ が $x\to\infty$ のとき ∞ に発散するとは、以下が成り立つこと。

$\forall k\in\mathbb{R}\ \exists L>c\ \ s.t.\ \forall x\geqq L\ \ f(x)>k$

このことを $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ 又は $f(x)\to\infty\ (x\to\infty)$ と書く。

(2) $\lim_{x\to\infty}(-f(x))=\infty$ のとき、$f(x)$ は $x\to\infty$ のとき $-\infty$ に発散するという。

$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ などと書く。

$\lim_{x\to\infty} f(x)$ に対しても、定理1.11〜1.14に相当するものが成立。

定理1.15 (コーシーの判定条件)

・$f(x)$ が $x\to\infty$ のとき収束する

$\Longleftrightarrow$ ・$\forall\varepsilon>0,\ \exists L>c\ \ s.t.\ \forall x, x'\geqq L,\ |f(x)-f(x')|<\varepsilon$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$ についても同様に定義される。

1.4. 連続関数 (1変数)

定義 $a\in\mathbb{R}$ とし、$f(x)$ は「点 a を含むある開区間」で定義されているとする。

($\Rightarrow f(x)$ は $x=a$ で定義されている)

関数 f が点 $x=a$ で連続であるとは、

$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ が成り立つことをいう。

つまり、$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ s.t.$「$|t-a|<\delta\Rightarrow|f(t)-f(a)|<\varepsilon$」

注意 ・f が点 $x=a$ で連続

$\Longleftrightarrow$ ・$\lim_{n\to\infty} x_n=a$ となる任意の数列 $\{x_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(a)$

(定理1.11)

定義 ・$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a)$ のとき、f は $x=a$ で右連続であるという
$\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a)$ のとき、f は $x=a$ で左連続であるという } 片側連続

定義 区間I上の関数 f が I の全ての点で連続であるとき、

f は区間Iで連続であるという。つまり、$\forall x\in I,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ s.t.$「$|t-x|<\delta\ (t\in I)\Rightarrow|f(t)-f(x)|<\varepsilon$」

但し、Iの端点がIに属するとき、その点では片側連続でよい。

(例えば、$I=[a,b)$ のとき、左端 a では右連続でよい。)

定理1.16 $f(x)$ と $g(x)$ が点 a で連続ならば

関数 $f(x)+g(x)$、$cf(x)$ (c は定数)、$f(x)g(x)$、$\frac{g(x)}{f(x)}\ (f(a)\neq 0)$、$|f(x)|$ は点 a で連続

$D\subset\mathbb{R}$ f を D 上の関数とする $f(D)=\{f(x)\mid x\in D\}$

定義 ・関数 f が D で上に有界であるとは、$f(D)$ が上に有界であること。 …①
・ 〃 下に有界 〃 〃 下に有界 〃 …②
・ 〃 有界 〃 〃 有界 〃 …③

① $\Longleftrightarrow\ \exists M\in\mathbb{R}\ s.t.\ \forall x\in D\ \ f(x)\leqq M$

$\exists M>0\ s.t.\ \forall x\in D,\ |f(x)|\leqq M$

$$\left.\begin{array}{ll}\sup_{x\in D} f(x)=\sup f(D) & \inf_{x\in D} f(x)=\inf f(D)\\ \max_{x\in D} f(x)=\max f(D) & \min_{x\in D} f(x)=\min f(D)\end{array}\right\}\text{と書く}$$

NO. 14

DATE

定理1.17（最大値と最小値の定理）

閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 f は $[a,b]$ で最大値と最小値をもつ.

（特に, f は $[a,b]$ で有界）

証明 f を $[a,b]$ 上の連続関数とする（最大値について示す）

(i) f が $[a,b]$ で上に有界であることを示す,（背理法）

f が $[a,b]$ で上に有界でないとする。$f([a,b])$ が上に有界でないので,

$\forall n \in \mathbb{N},\ {}^{\exists} t_n \in [a,b]$ s.t. $f(t_n) > n$ …①

$a < t_n < b$ なので, $\{t_n\}$ は有界列

定理1.9より, $\{t_n\}$ は収束部分列 $\{t_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ をもつ。$c = \lim_{k\to\infty} t_{n_k}$ とする.

$a \leq t_{n_k} \leq b$ より, $a \leq c \leq b$　$c \in [a,b]$

f は $[a,b]$ で連続なので, $f(t_{n_k}) \to f(c)$, $(k\to\infty)$ …②

有限確定

一方, ①より, $f(t_{n_k}) > n_k \to \infty$ $(k\to\infty)$ …③

②, ③は矛盾.　$\therefore f$ は $[a,b]$ で上に有界

(ii) $\max_{x\in[a,b]} f(x)$ が存在することを示す.

(i)より, $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = \sup f([a,b]) \in \mathbb{R}$ が存在する（$\because$ 連続の公理）

$f(x_n) \to M$ $(n\to\infty)$　$x_n \in [a,b]$ $(\forall n)$　④

となる数列 $\{x_n\}$ が存在する.

$\left(\because\ \forall n \in \mathbb{N},\ {}^{\exists} x_n \in [a,b] \text{ s.t. } M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M\right)$

$\{x_n\} \in [a,b]$ より, $\{x_n\}$ は有界列

定理1.9より, $\{x_n\}$ は収束部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ をもつ. $d = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ とする.

$a \leq x_{n_k} \leq b$ より, $a \leq d \leq b$　$d \in [a,b]$

f は $[a,b]$ で連続なので $f(x_{n_k}) \to f(d)$ $(k\to\infty)$ …⑤

④より, $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$ なので ⑤より, $M = f(d)$

$M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$

定理1.18（中間値の定理）

f を閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数とし, $f(a) \neq f(b)$ とする.

このとき $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の数 p $(p \neq f(a), f(b))$ に対して,

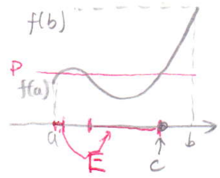
$f(c) = p$ かつ $a < c < b$

をみたす数 c が存在する.

定理1.17と定理1.18より,

系 閉区間 I 上の連続関数 f の値域は, 閉区間 $[m, M]$

ここで, $M = \max_{x\in I} f(x)$　$m = \min_{x\in I} f(x)$ である.



<u>証明</u> $f(a)<f(b)$とする。
$f(a)<p<f(b)$となる p を任意にとる。
$E=\{x\in[a,b]\mid f(x)\leqq p\}$とする $\left(\begin{array}{l}a\in E \text{ なので } E\neq\phi \\ E \text{ は上に有界} \\ \to \sup E \text{ が存在}\end{array}\right)$

$c=\sup E$とする。
$f(c)=p$であることを証明する。
$c=\sup E$なので $x_n\to c\ (n\to\infty)$ $x_n\in E\ (\forall n\in\mathbb{N})$
となる数列$\{x_n\}$が存在する。($\because \forall n\in\mathbb{N}\ \exists x_n\in E$ s.t. $c-\frac{1}{n}\leqq x_n\leqq c$)
$f(x_n)\leqq p\ (\forall n\in\mathbb{N})$, $f(x_n)\to f(c)\ (n\to\infty)$
($\because x_n\in E$) ($\because f$の連続性)
$\therefore f(c)\leqq p$ … ①
これより $c<b$ である。
一方、$t_n=c+\frac{b-c}{n}$とすると、$c<t_n\leqq b$. $(\forall n)$
$t_n\notin E\ (\forall n\in\mathbb{N})$ $\therefore f(t_n)>p\ (\forall n\in\mathbb{N})$
$t_n\to c\ (n\to\infty)$ と fの連続性により $f(t_n)\to f(c)\ (n\to\infty)$
$\therefore f(c)\geqq p$ … ②
①,②より $f(c)=p$ これより $a<c$ である。

合成関数は $g\circ f$と書く つまり、$(g\circ f)(x)=g(f(x))$
<u>定理1.19</u> $\left.\begin{array}{l}f \text{ を区間 } I \text{ 上の連続関数} \\ g \text{ を } f(I) \text{ を含む区間で定義された連続関数}\end{array}\right)$ とする
このとき、合成関数 $g\circ f$はI上で連続
<u>証明</u> $a\in I$を任意にとる
$x_n\to a\ (n\to\infty)$ $x_n\in I\ (\forall n\in\mathbb{N})$である数列$\{x_n\}$を任意にとる
fの連続性から $f(x_n)\to f(a)\ (n\to\infty)$
gの 〃 $(g\circ f)(x_n)=g(f(x_n))\longrightarrow g(f(a))=(g\circ f)(a)\ (n\to\infty)$
$g\circ f$はIで連続
<u>定義</u>(単調関数) f、区間I上の関数とする。
(1)「$x_1,x_2\in I$、$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\leqq f(x_2)$」のとき fはI上<u>単調増加</u>であるという。
「$x_1,x_2\in I$ $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\geqq f(x_2)$」 〃 〃 <u>単調減少</u> 〃
これらを合わせて<u>単調関数</u>という。
(2)「$x_1,x_2\in I$ $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$」のとき fはI上<u>狭義単調増加</u>であるという。
「 〃 〃 $\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$」 〃 〃 <u>狭義単調減少</u> 〃
これらを合わせて<u>狭義単調関数</u>という。

$D \in \mathbb{R}$ 上の関数 f が
$x_1, x_2 \in D,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
をみたすとき、f は D 上で **1対1** であるという。
このとき f の逆関数を f^{-1} と書く。

注　f が区間 I で狭義単調 $\Rightarrow$ f は I で1対1

定理1.20　閉区間 $I=[a,b]$ 上の狭義単調な連続関数 f に対して、逆関数 f^{-1} は閉区間 $f(I)$ 上の狭義単調な連続関数である。(難波 定理1.22)

1.5 初等関数

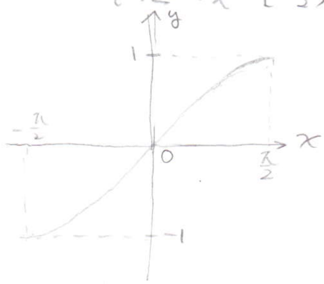
☆ 三角関数

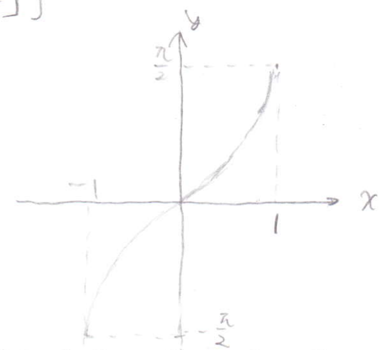
$\sin x,\ \cos x,\ \tan x.\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

☆ 逆三角関数

1) $\sin x$ は $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上で狭義単調増加、連続、値域 $[-1,1]$
その逆関数を $\sin^{-1}x$ や $\arcsin x$ と書く。(アークサインとよぶ)

$\sin^{-1}x$ は $\begin{cases} 定義域\ [-1,1] \\ 値域\ [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$ で、狭義単調増加、連続.





2) $\cos x$ は $[0,\pi]$ 上狭義単調減少、連続で値域 $[-1,1]$.
その逆関数を $\cos^{-1}x$ や $\arccos x$ と書く。

$\cos^{-1}x$ は $\begin{cases} 定義域\ [-1,1] \\ 値域\ [0,\pi] \end{cases}$ で狭義単調減少、連続