

$f(x)$ は a のまわりで有界だから、 $\exists M \in \mathbb{R}$ が存在して、

$$|f(x)| \leq M \quad (x \in E^*(a; \delta_1)) \text{ が成り立つ.}$$

$$\text{よって} \quad -M|B(x)| \leq \underbrace{f(x)B(x)}_{B_1(x)} \leq M|B(x)|$$

$B(x)$ は a で連続かつ $B(a) = 0$ より、 $B(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow a)$ より、 $|B(x)| \rightarrow 0 (x \rightarrow a)$

$$\text{それゆえ、} \lim_{x \rightarrow a} M|B(x)| = 0 \quad \lim_{x \rightarrow a} \{-M|B(x)|\} = 0$$

よって、はさみうちの原理より、

$$\lim_{x \rightarrow a} B_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x)B(x)) = 0$$

つまり、 $B_1(x)$ は $x=a$ で連続で $B_1(a) = f(a)B(a) = f(a) \cdot 0 = 0$

$$\text{だから、} \begin{cases} h(x) = h(a) + (x-a)h'(a) + (x-a)B_1(x) \\ B_1(x) \text{ は } a \text{ で連続かつ } B_1(a) = 0 \end{cases}$$

またするため、 $h(x)$ は a で微分可能で、 $h(a) = 0$ 、 $h'(a) = 0$ である。

(2) $(\Rightarrow)$ g, h は a で微分可能より、

$$g(x) = g(a) + (x-a)g'(a) + (x-a)B_2(x)$$

$$g(a) = 0 \text{ より}$$

$$g(x) = (x-a)g'(a) + (x-a)B_2(x)$$

$$h(x) = h(a) + (x-a)h'(a) + (x-a)B_3(x)$$

$$h(a) = 0 \text{ より、}$$

$$h(x) = (x-a)h'(a) + (x-a)B_3(x)$$

$g(x) \neq 0$ において、つまり $x \neq a$ において

$$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{(x-a)(h'(a) + B_3(x))}{(x-a)(g'(a) + B_2(x))} = \frac{h'(a) + B_3(x)}{g'(a) + B_2(x)}$$

$B_2(x), B_3(x)$ は $x=a$ で連続かつ、 $B_2(a) = B_3(a) = 0$ より、

$$\lim_{x \rightarrow a} B_2(x) = \lim_{x \rightarrow a} B_3(x) = 0$$

$$\text{よって} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{h'(a) + B_3(x)}{g'(a) + B_2(x)} = \frac{h'(a)}{g'(a)} \quad \text{収束する.}$$

($\Leftarrow$) $g(x)$ は $x=a$ で微分可能より、

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a) \quad g(a) = 0 \text{ より、}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{x - a} = g'(a) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{よって} \quad h'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ f(x) \cdot \frac{g(x)}{x - a} \right\} \quad (\times)$$

$x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は収束するから、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k \quad (k \text{ は実数}) \quad \dots \textcircled{2} \quad \text{となる } k \text{ が存在する.}$$

①, ② より、 $(\times)$ は、

No. 17 内(9.8), 内(10.1) ~ 内(10.3)

$$h'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = k \cdot g'(a) \text{ となり, } h'(a) \text{ が存在するので, } h(x) \text{ は } x=a \text{ で}$$

微分可能. よ, 2

 $h \text{ は } a \text{ で微分可能} \iff x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \text{ は収束する.}$

内(10.1)

 $x \rightarrow a+0 \text{ のときの } f'(x) \text{ の極限を } A' \text{ とあらわす. 正数 } \varepsilon_0 \text{ をひとつ取る.}$

$$|f'(x) - A'| < \varepsilon_0 \quad (x \in (a, b) \text{ かつ } a < x < a + \delta_0)$$

 $\delta_0 \text{ が成り立つ正数 } \delta_0 \text{ が取れる. } c = \min\{b, a + \delta_0\}; M = |A'| + \varepsilon_0 \text{ と定めると,}$

$$|f'(x)| < M \quad (x \in (a, c) \text{ のとき})$$

 $\delta_0 \text{ が成り立つ. } u, v \in (a, c) \text{ かつ } u < v \text{ のとき, 平均値の定理より,}$

$$f(u) - f(v) = f'(w)(u - v) \text{ となる. } u \text{ と } v \text{ の間の数 } w \text{ が取れる,}$$

$$w \in (a, c) \text{ であるから, } |f'(w)| < M \text{. よ, 2.}$$

$$|f(u) - f(v)| \leq M |u - v| \quad (u, v \in (a, c) \text{ のとき})$$

 $\delta_0 \text{ が成り立つ. この不等式より, 正数 } \varepsilon \text{ に対して, } 0 < \delta < \min\{\frac{\varepsilon}{M}, c - a\} \text{ をみたす正数 } \delta \text{ を取ると,}$

$$|f(u) - f(v)| < \varepsilon \quad (u, v \in (a, a + \delta) \text{ のとき})$$

 $\delta_0 \text{ が成り立つ. よ, 2. コーシーの収束条件より, } f(x) \text{ は } x \rightarrow a+0 \text{ のとき収束する. この極限を } A' \text{ とあらわす, } x \in (a, b) \text{ に対して, 区間 } [a, x] \text{ で関数 } g \text{ に対して平均値の定理を用いて,}$

$$\frac{f(x) - A}{x - a} = f'(c) \text{ かつ } a < c < x$$

 $\varepsilon \text{ をみたす実数 } c \text{ が存在することが分かる. 各 } x \in (a, b) \text{ に対して, このような } c \text{ をひとつ取り, それを } C_x \text{ とあらわす. } x \in (a, b) \text{ のとき, } 0 < |C_x - a| < |x - a|.$
 $\text{特に } C_x \rightarrow a \text{ (} x \rightarrow a+0 \text{)}. \text{ このことと, } f(x) \rightarrow A' \text{ (} x \rightarrow a+0 \text{) より, } f'(C_x) \rightarrow A' \text{ (} x \rightarrow a+0 \text{) 合成関数の極限の性質を用いた. 以上より}$

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \rightarrow A' \quad (x \rightarrow a+0)$$

 $\text{すなわち, } g \text{ は } a \text{ で微分可能であり, } g'(a) = A' = \lim_{x \rightarrow a+0} f'(x)$

内(10.2)

 $a_n \rightarrow c \text{ (} n \rightarrow \infty \text{), } b_n \rightarrow c \text{ (} n \rightarrow \infty \text{) かつ } a < a_n < b_n < c \text{ (} n \in \mathbb{N} \text{) が成り立つとする. 各 } n \in \mathbb{N} \text{ に対して, 区間 } [a_n, b_n] \text{ 上で関数 } f \text{ は微分可能であるから, 平均値の定理より,}$

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(c_n) \text{ かつ } a_n < c_n < b_n$$

 $\varepsilon \text{ をみたす } C_n \in \mathbb{R} \text{ が取れる. } a_n \rightarrow c \text{ (} n \rightarrow \infty \text{) かつ } b_n \rightarrow c \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)}$
 $\text{であるから, はさみうちの原理より, } C_n \rightarrow c \text{ (} n \rightarrow \infty \text{) 関数 } f \text{ は, } c \text{ で連続であるから, } f'(c_n) \rightarrow f'(c) \text{ (} n \rightarrow \infty \text{) すなわち, 次の成り立つ,}$

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \rightarrow f'(c) \quad (n \rightarrow \infty)$$

問(10.3)

(1) $I = (0, +\infty)$ とおく. I 上の函数 y^d を $g(y)$ とあらわす. $x \in I$ とする. $f(x) = \frac{g(x+1) - g(x)}{x+1-x}$ であるから, 区間 $[x, x+1]$ で函数 $g(y)$ に対して, 平均値の定理を用いて,

$$f(x) = g'(C_x) \text{ かつ } x < C_x < x+1$$

が成り立ち, $C_x \in \mathbb{R}$ が取れる. $g'(y) = \alpha y^{\alpha-1}$ であるから,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(y) = \begin{cases} 0 & 0 < \alpha < 1 \text{ のとき} \\ 1 & \alpha = 1 \text{ のとき} \\ +\infty & \alpha > 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

また, $x < C_x$ より, $C_x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow +\infty$) より, 合成函数の極限についての性質より, 次を得る.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < \alpha < 1 \text{ のとき} \\ 1 & \alpha = 1 \text{ のとき} \\ +\infty & \alpha > 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

(2) $g(y) = y^\alpha$ ($y \in (0, +\infty)$) と定める. $I = (\frac{1}{2}, +\infty)$ とおく. $x \in I$ のとき, $x^2+1 < x^2+2x$ であって

$$f(x) = \frac{g(x^2+2x) - g(x^2+1)}{(x^2+2x) - (x^2+1)} \cdot (2x-1)$$

とあらわせるから, 函数 $g(y)$ に対して, 区間 $[x^2+1, x^2+2x]$ で平均値の定理を用いると, $f(x) = g'(C_x)(2x-1)$ かつ $x^2+1 < C_x < x^2+2x$ が成り立ち, $C_x \in \mathbb{R}$ が取れることが分かる. $f_1(x) = g'(x^2+1)(2x-1)$, $f_2(x) = g'(x^2+2x)(2x-1)$ とおく. 函数 $g'(y)$ は区間 $(0, +\infty)$ 上で「広義単調より」, $x \in I$ のとき, $\min\{f_1(x), f_2(x)\} \leq f(x) \leq \max\{f_1(x), f_2(x)\}$ より, 函数 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ が $x \rightarrow +\infty$ のとき同じ極限を持つならばその極限は, $f(x)$ の極限でもある. $x \in I$ のとき,

$$f_1(x) = \alpha \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\alpha-1} \left(2 - \frac{1}{x}\right) x^{2\alpha-1}, \quad f_2(x) = \alpha \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} \left(2 - \frac{1}{x}\right) x^{2\alpha-1}.$$

であることから, 次がわかる,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \begin{cases} 0 & 0 < \alpha < \frac{1}{2} \text{ のとき} \\ 1 & \alpha = \frac{1}{2} \text{ のとき} \\ +\infty & \alpha > \frac{1}{2} \text{ のとき} \end{cases}$$

以上より, 次が分かる,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < \alpha < \frac{1}{2} \text{ のとき} \\ 1 & \alpha = \frac{1}{2} \text{ のとき} \\ \infty & \alpha > \frac{1}{2} \text{ のとき} \end{cases}$$

No.18 問(10.4) ~ 問(10.5)

問(10.4)

(1) $[-1, \infty)$ 上で

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}} - \log(1+x) \text{ とおく、}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{\log(1+x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ とあらわす。平均値の定理より、}$$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) \text{ となる } c \text{ が } 0 \text{ と } x \text{ の間に存在する、}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{すなわち } f'(c) &= \frac{\frac{c}{\sqrt{1+c}} - \log(1+c)}{1+c} - \frac{1}{1+c} = \frac{1}{1+c} \left(\frac{1}{\sqrt{1+c}} (1+c) - 1 \right) \\ &= \frac{1}{1+c} \left(\frac{2+c-2\sqrt{1+c}}{2\sqrt{1+c}} \right) \end{aligned}$$

$$g(c) = 2+c-2\sqrt{1+c} \text{ とおくと、}$$

$$g'(c) = \frac{3+c}{2\sqrt{1+c} \cdot (2\sqrt{1+c}+1)}$$

c は 0 と x の間にあり、 $x > -1$ であるから、 $c > -1$ であることは間違いない。
よって下の増減表がかけ、よって $0 < c < x$ または $-x < c < 0$ のいずれの

c	-1	$\dots$	$-\frac{3}{4}$	$\dots$
$g'(c)$			$-$	$+$
$g(c)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$

$$\text{とき、 } g(c) \geq g(-\frac{3}{4}) = \frac{1}{4} > 0$$

つまり $f'(c) > 0$ が成り立つ、

$$\text{よって、 } \frac{1}{\sqrt{1+x}} > \frac{\log(1+x)}{x} \quad (x > -1 \text{ かつ } x \neq 0)$$

(2) 考え方: $e^x \leq x^e$

$$\text{両辺に自然対数をとる } x \leq e \log x$$

$$\text{両辺を } x > 0 \text{ でわる } 1 \leq \frac{e \log x}{x}$$

つまり、 $1 \leq \frac{e \log x}{x}$ の大小を調べるわけだ。

$$\text{よって } g(x) = 1 - \frac{e \log x}{x} \text{ とおく、 } g'(x) = -e \cdot \frac{1 - \log x}{x^2} = \frac{(-e)(1 - \log x)}{x^2}$$

右の増減表より、

$$x > 0 \text{ かつ } x \neq e \text{ なら } g(x) > 0$$

$$\text{よって } 1 > \frac{e \log x}{x} \Leftrightarrow x > e \log x$$

$$\Leftrightarrow x > \log x^e \Leftrightarrow e^x > x^e \quad (x > 0, x \neq e)$$

x	0	$\dots$	e	$\dots$
$g'(x)$	$+$	$-$	0	$+$
$g(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

(3) $f(t) = \frac{t}{\sin t}$ ($t \in (0, 1]$) とする.

$$f(\operatorname{Arcsin} x) = \frac{\operatorname{Arcsin} x}{\sin(\operatorname{Arcsin} x)} = \frac{\operatorname{Arcsin} x}{x}$$

$x < \operatorname{Arcsin} x$ であることが示せる. ($\because f(t) > 1$ ($t \in (0, 1]$))

よって $\frac{\operatorname{Arcsin} x}{x} - \frac{x}{\sin x} = f(\operatorname{Arcsin} x) - f(x)$.

平均値の定理から、

$$f(\operatorname{Arcsin} x) - f(x) = (\operatorname{Arcsin} x - x) f'(c) \quad (x < c < \operatorname{Arcsin} x)$$

となる c が存在する.

ここで $f(c) = \frac{c}{\sin c}$ より、 $f'(x) = \frac{\sin c - c \cos c}{\sin^2 c} = \frac{g(c)}{\sin^2 c}$ とする.

$$g(c) = \sin c - c \cos c = c \sin c > 0 \quad (0 < x < c)$$

また、 $g(0) = 0$ より、 $x < c$ で $g(c) > 0$

よって $x < c$ で $f'(c) > 0$

つまり、 $\frac{\operatorname{Arcsin} x}{x} > \frac{x}{\sin x}$

(4) (3) と同様の方針.

例 (10.5)

$n \in \mathbb{N}$ とする. $a_n \neq a_{n+1}$ のときは平均値の定理より、

$$a_{n+2} - a_{n+1} = f(a_{n+1}) - f(a_n) = f'(c_n) \cdot (a_{n+1} - a_n)$$

が成り立つ. a_n と a_{n+1} との間の数 c_n が取れる.

($a_n < a_{n+1}$ の場合も、 $a_{n+1} < a_n$ の場合も成立).

$c_n \in I$ であるから、 $|f'(c_n)| \leq r$. よって

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq r |a_{n+1} - a_n| \quad (*)$$

が成り立つ. また、 $a_n = a_{n+1}$ のとき、 $a_{n+1} = f(a_n) = f(a_{n+1}) = a_{n+2}$ であるから、

この場合も、不等式 (*) は成り立つ. $m \in \mathbb{N}$ とし、 $n < m$ であるすべての自然数 n に対して (*) を用いて、

$$|a_{m+1} - a_m| \leq r^{m-1} |a_2 - a_1|$$

を得る. $r^{m-1} |a_2 - a_1| = \frac{|a_2 - a_1|}{1-r} (r^{m-1} - r^m)$ であるから、 $b_n = -\frac{|a_2 - a_1|}{1-r} r^{m-1}$ ($n \in \mathbb{N}$)

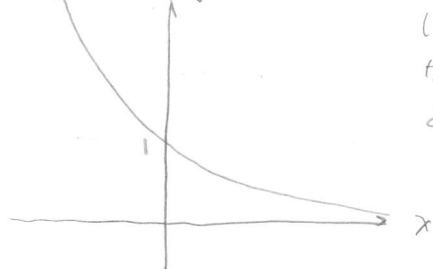
とすると、 $|a_{n+1} - a_n| \leq b_{n+1} - b_n$ ($n \in \mathbb{N}$)

が成り立つ. $|b_n| \leq \frac{|a_2 - a_1|}{1-r}$ ($n \in \mathbb{N}$) より、数列 $\{b_n\}$ は有界.

例 (3.1) (2) より、 $\{a_n\}$ は収束する.

No. 19 内(10.6) ~ 内(10.8)

内(10.6)

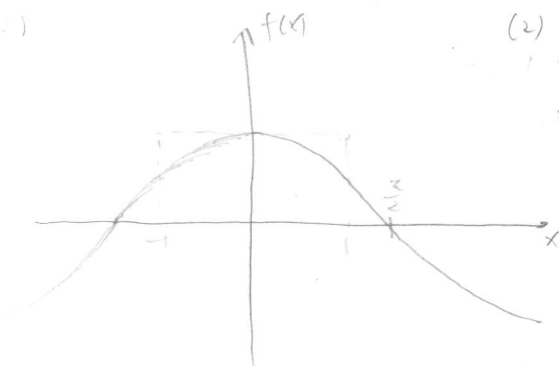
(1) $I = (0, +\infty)$ と取る,なぜなら、 $y = e^{-x}$ のグラフは $\forall x \in \mathbb{R}$ で $y > 0$ であるため、 $a_{n+1} = e^{-a_n}$ で、 a_1 が任意であるとして、 $\forall a_n \in I$ ($n \geq 2$) が成り立つ。また、区間 I では

$$|f'(x)| = |-e^{-x}| < |-e^{-0}| = 1$$

これらの議論から、 $t \in \mathbb{R}$ かつ $0 < t < 1$ 、 I は区間 $(0, +\infty)$ 、 f は I 上の実数値関数で f は I 上微分可能であり、 $f(I) \subset I$ かつ $|f'(x)| \leq t$ をみたすから、 $a_{n+1} = e^{-a_n}$ ($a_n \in I$) である数列 $\{a_n\}$ は収束するところから

内(10.5)の結果よりいえる。

(1.)

(2) $I = [-1, +\infty)$ とする, $f(x) = \sin x$ とすると、 $x \in I$ で $-1 \leq f(x) \leq 1$ であるから、 $f(I) \subset I$ が成り立つ。また、区間 I で

$$f'(x) = \cos x$$

より、

 $a_1 = \frac{\pi}{2}$ ($2n+1$) 以外のときは $f'(x) < 1$ であり、 a_2 以降は $-1 \leq a_2 \leq 1$ より、 $|a_n| \geq 1$ にはならない。 $a_1 = \frac{\pi}{2}$ ($2n+1$) のときは $|a_1| = 1$ となるが、 a_2 以降は $-1 \leq a_2 \leq 1$ より、 $|a_n| \geq 1$ にはならない。よってどちらにせよ、 a_2 以降は内(10.5)に帰着できるので、数列 $\{a_n\}$ は収束する。

内(10.7)

$$(1) \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 + \frac{\alpha_n}{n \log n} \quad \text{より、} \alpha_n = \frac{n \log n}{b_n} (b_{n+1} - b_n)$$

平均値の定理から、

 $b_{n+1} - b_n = b_c'$ ($n < c < n+1$) となる c が存在する。

$$\text{よって } \alpha_n = \frac{n \log n}{b_n} b_c'$$

$$\text{よって } b_c' = \alpha (\log c)^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{c} \text{ より、} \alpha_n = \frac{n \log n}{b_n} \cdot \frac{\alpha (\log c)^{\alpha-1}}{c} = \alpha \cdot \frac{n}{c} \left(\frac{\log c}{\log n} \right)^{\alpha-1}$$

$$\text{よって } n < c < n+1 \text{ より } 1 < \frac{c}{n} < 1 + \frac{1}{n} \text{ から、} n \rightarrow \infty \text{ のとき、はさみうちの原理から、} \frac{c}{n} \rightarrow 1 \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)}$$

$$\text{すなわち } \log n < \log c < \log(n+1) < \log n + 1 \quad (*)$$

$$1 < \frac{\log c}{\log n} < 1 + \frac{1}{\log n} \quad \text{したがって、同様に } \frac{\log c}{\log n} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\text{よって } a_n = \alpha \cdot \frac{n}{c} \left(\frac{\log c}{\log n} \right)^{\alpha-1} = \alpha \cdot \frac{1}{\frac{c}{n}} \left(\frac{\log c}{\log n} \right)^{\alpha-1} \rightarrow \alpha \cdot \frac{1}{1} \cdot (1)^{\alpha-1} = \alpha \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\text{つまり、} \underline{a_n \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow \infty)}$$

(2) $0 < \alpha < c$ である α に対して $b_n = (\log n)^\alpha$ と定める。

$$(1) \text{より、} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 + \frac{a_n}{n \log n} \quad \text{と } \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ を定める、} \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ を定める、} a_n \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow \infty)$$

と定める。

$$\alpha = c - \alpha > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \cdot |a_n - \alpha| < c - \alpha$$

$$\text{よって } a_n < \alpha + c - \alpha = c$$

$$\text{したがって } n \geq N \text{ として } \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 + \frac{a_n}{n \log n} < 1 + \frac{c}{n \log n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

つまり $a_n > 0, b_n > 0$ かつ $(n \geq N)$ のとき $(1) \leq (2) \leq (3)$ の結果より、

$$b_n \rightarrow \infty \rightarrow a_n \rightarrow \infty \text{ がいえる。}$$

$a_n > 0$ は条件より成り立つ。

$$b_n \text{ については } b_n = (\log n)^\alpha \geq (\log 2)^\alpha > 0 \quad \uparrow (\log 2) > 0$$

$$\text{よって } a_n \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty) \text{ である。}$$

(b) (10.8)

$$(1) \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 + \frac{\beta_n}{n(\log n)^c} \quad (*)$$

$$\beta_n = \frac{n(\log n)^2}{b_n} (b_{n+1} - b_n) = \frac{n(\log n)^2}{b_n} \cdot bc' \quad (n < c < n+1)$$

$$bc' = - \frac{\frac{\beta}{c}}{(\log c)^c} = - \frac{\beta}{c(\log c)^c}$$

$$\text{よって } \beta_n = \frac{n(\log n)^2}{b_n} \cdot \frac{\beta}{c(\log c)^c} = \beta \cdot \frac{n}{c} \left(\frac{\log n}{\log c} \right)^2 \cdot \frac{1}{b_n}$$

(1) と同様に $\frac{n}{c} \rightarrow 1, \frac{\log n}{\log c} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$

$$\text{また } b_n = 1 - \frac{\beta}{\log n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad (*) \quad b_n \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\text{よって } \beta_n = \beta \cdot \frac{n}{c} \cdot \left(\frac{\log n}{\log c} \right)^2 \cdot \frac{1}{b_n} \rightarrow \beta \cdot 1 \cdot (1)^2 \cdot \frac{1}{1} = \beta \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\text{つまり、} \beta_n \rightarrow \beta \quad (n \rightarrow \infty)$$

No. 20 問 (10.8) 問 (12.1) ~ 問 (12.4)

(2) $0 < \epsilon < \beta$ である β に対して、

$$b_n = 1 - \frac{\beta}{\log n} \text{ と定める.}$$

$$(1) \text{より, } \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 + \frac{\beta_n}{n(\log n)^2} > 1 + \frac{\epsilon}{n(\log n)^2} \geq \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n \geq N)$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 + \frac{\beta_n}{n(\log n)^2} \text{ で } \beta_n > 0, \text{ また, } b_n \rightarrow 1 \text{ に収束することから,}$$

$$\forall n \text{ で } b_n > 0 \text{ かつ, 仮定より, } b_n \text{ で } a_n > 0$$

よって、問 (3, 2) (1) の結果より、 $\{a_n\}$ は負でない実数に収束する。

問 (12.1)

函数 $f^{(m)}$ に対して、Taylor の公式を用いて、 $0 < |x-a| < \delta_0$ のとき、

$$f^{(m)}(x) = f^{(m)}(a) + \frac{f^{(m+1)}(a)}{1!} (x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-m-1)!} (x-a)^{n-m-1} + \frac{f^{(n)}(c_x)}{(n-m)!} (x-a)^{n-m}$$

よって、 a と x の間の数 c_x が取れることが分かる。仮定より、

$$f^{(m)}(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ であるから,}$$

$$f^{(m)}(x) = \frac{f^{(n)}(c_x)}{(n-m)!} (x-a)^{n-m}, \quad 0 < \frac{c_x - a}{x - a} < 1$$

$$(1) x \in (a - \delta_0, a) \text{ とすると, } (x-a)^{n-m} = (-1)^{n-m} |x-a|^{n-m}, \quad f^{(n)}(c_x) f^{(n)}(a) > 0$$

$$\text{であるから, } (-1)^{n-m} f^{(m)}(a) > 0 \text{ かつ } f^{(m)}(x) > 0.$$

$$(-1)^{n-m} f^{(m)}(a) < 0 \text{ かつ } f^{(m)}(x) < 0.$$

$$(2) x \in (a, a + \delta_0) \text{ とすると, } (x-a)^{n-m} > 0, \quad f^{(n)}(c_x) f^{(n)}(a) > 0 \text{ であるから,}$$

$$f^{(n)}(a) > 0 \text{ かつ } f^{(m)}(x) > 0.$$

$$f^{(n)}(a) < 0 \text{ かつ } f^{(m)}(x) < 0.$$

問 (12.2)

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 \leq y \leq x)$$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}, \quad R_{n+1}(x; 0) = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}$$

$$R_{n+1}(x; 0) = \left| \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \left| e^y \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq e^x \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= e^x \cdot \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdots \frac{x}{m} \cdots \frac{x}{n+1}$$

$$\left(\frac{x}{m} \geq 1, \frac{x}{m+1} < 1 \text{ となる } m \text{ が } m \in \mathbb{N} \text{ とする} \right)$$

$$\leq e^x \cdot \frac{x^m}{m!} \cdot \left(\frac{x}{m+1} \right)^{n-m} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{よって } R_{n+1}(x; 0) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \left(a_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \text{ として } \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ が } (2.8) \text{ に使えてもよい} \right)$$

$$(2) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \dots$$

$$n=2k \text{ のとき } \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0 \quad n=2k+1 \text{ のとき } \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}$$

$R_{n+1}(x; 0) \rightarrow 0$ として、

$n=2k$ のとき

$$\left| R_{2k+1}(x; 0) \right| = \left| \frac{(-1)^n x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| = \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (1) \text{ と同様}$$

$n=2k+1$ のとき

$$\left| R_{2k}(x; 0) \right| = \left| 0 \cdot x^{2k} \right| = 0 \quad \text{よって } R_{n+1}(x; 0) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

(3) (2) と同様の方法

例 (12.3)

(1) $x > 0$ のとき、函数 e^x の 0 における Taylor の公式より、

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \dots + \frac{1}{m!} x^m + \frac{e^c}{(m+1)!} x^{m+1}, \quad 0 < c < x$$

が成り立つ。 $c \in \mathbb{R}$ が取れることが分る。 $0 < c < x$ より、 $1 < e^c$

$$\text{よって } e^x > \frac{1}{(m+1)!} x^{m+1}。 \text{ 逆に、 } x > 0 \text{ のとき、 } 0 < \frac{x^m}{e^x} < \frac{(m+1)!}{x}$$

$$\frac{(m+1)!}{x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty) \text{ であるから、はさみうちの原理より、 } \frac{x^m}{e^x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty)$$

(2) $I = (0, +\infty)$ とおき、 $g(x) = \frac{x}{e^x}$ とおく。 (1) より、 $g(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty)$

(前半) $f(t) = \log t$ ($t \in I$) と $g(x)$ との合成函数 $g \circ f(t)$ は $g(\log t) = \frac{\log t}{e}$

$f(t) \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow \infty$) かつ $g(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow +\infty$) であるから、合成函数の極限についての性質より、 $g \circ f(t) = \frac{1}{e} \log t \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty)$

(後半) $f(t) = \log\left(\frac{1}{t}\right)$ ($t \in I$) と $g(x)$ との合成函数 $g \circ f(t)$ は $g(\log\left(\frac{1}{t}\right)) = t \log\left(\frac{1}{t}\right)$

$f(t) \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow 0$) かつ $g(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow +\infty$) であるから、合成函数の極限についての性質より、 $g \circ f(t) = -t \log t \rightarrow 0$ ($t \rightarrow 0$)。故に $t \log t \rightarrow 0$ ($t \rightarrow +\infty$)

例 (12.4)

(1) 函数 $\cos x$ の漸近展開は

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - o(x^5) \quad (x \rightarrow 0) \text{ である、}$$

$f(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_5 x^5 + o(x^5)$ ($x \rightarrow 0$) とする実数 $C_0, C_1, \dots, C_5$ を求める。

$$\text{まず、 } f(x) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos(-x)} = f(-x) \quad (x \in E) \text{ より、}$$

$$f(x) = f(-x) = C_0 - C_1 x + C_2 x^2 - \dots - C_5 x^5 + o(x^5) \quad (x \rightarrow 0) \text{ が成り立つ、}$$

No. 21 例 (12.4)

漸近展開の一意性 (p. 94 ~ 95 (11.7)) より, $C_j = C_j(-1)^j$ ($j = 0, 1, \dots, 5$)よ, $C_1 = C_3 = C_5 = 0$

$$\frac{1}{\cos x} = C_0 + C_2 x^2 + C_4 x^4 + o(x^5) \quad (x \rightarrow 0)$$

例 (11.2) (2) の結果より

$$1 = (C_0 + C_2 x^2 + C_4 x^4) \left(1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4\right) + o(x^5) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$1 = C_0 + \left(C_2 - \frac{1}{2!} C_0\right) x^2 + \left(C_4 - \frac{1}{2!} C_2 + \frac{1}{4!} C_0\right) x^4 + o(x^5) \quad (x \rightarrow 0)$$

係数 E 合わせると,

$$\begin{cases} C_0 = 1 \\ C_2 - \frac{1}{2} C_0 = 0 \\ C_4 - \frac{1}{2} C_2 + \frac{1}{24} C_0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C_0 = 1 \\ C_2 = \frac{1}{2} \\ C_4 = \frac{5}{24} \end{cases}$$

$$\text{以上より, } C_0 = 1 \quad C_1 = 0 \quad C_2 = \frac{1}{2} \quad C_3 = 0 \quad C_4 = \frac{5}{24} \quad C_5 = 0$$

$$(2) \quad \sin x = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + o(x^6) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{5}{24} x^4 + o(x^5) \quad (x \rightarrow 0)$$

例 (11.2) の結果より,

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \left(x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5\right) \left(1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{5}{24} x^4\right) + o(x^5) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$= x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) x^3 + \left(\frac{5}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\right) x^5 + o(x^5) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$= x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 + o(x^5) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\text{よ, } C_0 = 0, \quad C_1 = 1, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = \frac{1}{3}, \quad C_4 = 0, \quad C_5 = \frac{1}{5}$$

$$(3) \quad \text{函数 } \sin x \text{ の漸近展開 } \sin x = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + o(x^6) \quad (x \rightarrow 0) \text{ より,}$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!} x^2 + \frac{1}{5!} x^4 + o(x^5) \quad (x \rightarrow 0)$$

を得る. $\therefore$ の漸近展開と関係係, $f(x) \cdot \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (x \in E)$ より

$$f(x) = C_0 + C_1 x + \dots + C_5 x^5 + o(x^5) \quad (x \rightarrow 0)$$

となる実数 $C_0, C_1, \dots, C_5$ E 求める. $f(-x) = f(x) \quad (x \in E)$ より,

$f(x) = f(-x) = C_0 + C_1(-x) + \dots + C_5(-x)^5 + o(x^5) \cdot (x \rightarrow 0)$ が成り立つ。
 漸近展開の一意性 (p94-95 (11.7)) より、 $C_j = C_j(-1)^j$ ($j = 0, 1, 2, \dots, 5$)

よって $C_1 = C_3 = C_5 = 0$

$$f(x) = C_0 + C_2 x^2 + C_4 x^4 + o(x^5) \quad (x \rightarrow 0)$$

但し (11.2)(2) の結果より、

$$\Leftrightarrow 1 = (C_0 + C_2 x^2 + C_4 x^4) \left(1 - \frac{1}{3!} x^2 + \frac{1}{5!} x^4\right) + o(x^5) \cdot (x \rightarrow 0)$$

係数比較すると、

$$C_0 = 1, C_1 = 0, C_2 = \frac{1}{6}, C_3 = 0, C_4 = \frac{7}{360}, C_5 = 0$$

(4) (3) と同様におさる、(14.5)より得られる

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + \frac{x^5}{6!} + o(x^5)$$

$$f(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_5 x^5 + o(x^5) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$1 = (C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + C_5 x^5) \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + \frac{x^5}{6!}\right) + o(x^5)$$

$$= C_0 + \left(C_1 + \frac{C_0}{2!}\right)x + \left(C_2 + \frac{C_1}{2!} + \frac{C_0}{3!}\right)x^2 + \left(C_3 + \frac{C_1}{2!} + \frac{C_2}{3!} + \frac{C_0}{4!}\right)x^3$$

$$+ \left(C_4 + \frac{C_3}{2!} + \frac{C_2}{3!} + \frac{C_1}{4!} + \frac{C_0}{5!}\right)x^4 + \left(C_5 + \frac{C_4}{2!} + \frac{C_3}{3!} + \frac{C_2}{4!} + \frac{C_1}{5!} + \frac{C_0}{6!}\right)x^5$$

係数比較より、

$$\underline{C_0 = 1}, \quad C_1 + \frac{1}{2} = 0 \quad \underline{C_1 = -\frac{1}{2}} \quad C_2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = 0 \quad \underline{C_2 = \frac{1}{12}}$$

$$C_3 + \frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = 0 \quad \underline{C_3 = 0} \quad C_4 + \frac{1}{72} - \frac{1}{48} + \frac{1}{120} = 0 \quad \underline{C_4 = -\frac{1}{720}}$$

$$C_5 - \frac{1}{1440} + 0 + \frac{1}{144 \cdot 2} - \frac{1}{12 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2} + \frac{1}{12 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6} = 0$$

$$C_5 + \frac{4}{1440} - \frac{1}{120 \cdot 2} + \frac{1}{120 \cdot 6} = 0$$

$$C_5 + \frac{1}{360} - \frac{2}{120 \cdot 6} = 0 \quad \underline{C_5 = 0}$$

No. 22 内(12.5) ~ 内(12.9)

内(12.5)

$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_k}{k+1} (x-a)^{k+1} + R(x)$ により I 上の函数 $R(x)$ を定める. 函数 $f(x)$ が I 上で微分可能であるから, $R(x)$ も I 上で微分可能. また,

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k (x-a)^k + R'(x) \quad (x \in I) \text{ より,}$$

$$\frac{R'(x)}{(x-a)^{n-1}} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow a) \Rightarrow \frac{R(x)}{(x-a)^n} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow a)$$

が成り立つことを示せばよい. $\frac{R'(x)}{(x-a)^{n-1}} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow a)$ が成り立つとする.

$x \in I$ から $x \neq a$ のとき, $R(x)$ と $(x-a)^n$ に対してコーシーの平均値の定理を用いると,

$$\frac{R(x) - R(a)}{(x-a)^n - (a-a)^n} = \frac{R'(c_x)}{n(c_x-a)^{n-1}} \quad \text{かつ} \quad 0 < \frac{c_x - a}{x-a} < 1$$

である. $C_x \in \mathbb{R}$ が取れる. $|c_x - a| < |x - a|$ より, $(c_x \rightarrow a) \cdot (x \rightarrow a)$

合成函数の極限についての性質より, $\frac{1}{n} \cdot \frac{R'(c_x)}{(c_x-a)^{n-1}} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow a)$

$$R(a) = 0 \text{ であるから, } \frac{R(x)}{(x-a)^n} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0)$$

内(12.6)

$$(1) \quad f'(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f''(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2!}{(1-x)^3}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

$$\text{よって } f(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2!}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(n-1)!}{n!}x^n + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\text{つまり } f(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{1}{n}x^n + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$(2) \quad (1) \text{ より } f(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n}x^n + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \left(x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n}x^n \right)$$

$$R'_{n+1}(x) = \frac{1}{1-x} - (1 + x + \cdots + x^n) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

(3) 函数 $R_{n+1}(x)$ と x^{n+1} に対して, コーシーの平均値の定理を用いると,

$$\frac{R_{n+1}(b) - R_{n+1}(0)}{b^{n+1} - 0^{n+1}} = \frac{R'_{n+1}(C_{n+1})}{(n+1)C_{n+1}^n} = \frac{C_{n+1}^{n+1}}{1 - C_{n+1}} \cdot \frac{1}{(n+1)C_{n+1}^n} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1 - C_{n+1}}$$

$$R_{n+1}(b) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{b^{n+1}}{1 - C_{n+1}} \quad (0 < C_{n+1} < b)$$

$$f(b) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} b^k = f(b) - (1 + b + \cdots + b^n) = R_{n+1}(b) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{b^{n+1}}{1 - C_{n+1}}$$

$1 - C_{n+1} > 0$ より, b^{n+1} の符号による.

$$b > 0 \text{ のとき } f(b) > \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} b^k$$

$$b < 0 \text{ のとき}$$

$$n \text{ が奇数 } f(b) > \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} b^k$$

$$b = 0 \text{ のとき}$$

$$f(b) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} b^k$$

$$n \text{ が偶数 } f(b) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} b^k$$

NO. _____

$$\frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{x^2} \left(1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right)$$

DATE _____

(12.7)

$$(1) \quad \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{1}{x \sin x} \cdot o(x^2) = \frac{1}{\sin x} \cdot o(x) = \frac{x}{\sin x} \cdot o(1) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0)$$

$\underbrace{\frac{x}{\sin x}}_1 \quad \underbrace{o(1)}_0$

$$(2) \quad \frac{1}{(\sin x)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - (\sin x)^2}{x^2 \sin^2 x}$$

$$(\sin x)^2 = \left(x - \frac{1}{3!} x^3 + o(x^4)\right) \left(x - \frac{1}{3!} x^3 + o(x^4)\right)$$

$$= x^2 - \frac{1}{3} x^4 + o(x^4)$$

$$= \frac{-\frac{1}{3} x^4 + o(x^4)}{x^2 \sin^2 x} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{x^2 + o(x^2)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{3} \left(\frac{x^2}{\sin^2 x} + \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot o(1) \right) \rightarrow -\frac{1}{3} \quad (x \rightarrow 0)$$

$\underbrace{\frac{x^2}{\sin^2 x}}_1 \quad \underbrace{\frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot o(1)}_0$

(3) ~ (17) is ?

(12.8)

$$e^x = \frac{1+bx}{1+ax} + o(x^2) = 1 + \frac{b-a}{1+ax} x$$

$$= (1 + (b-a)x(1-ax + o(x)))$$

$$= 1 + (b-a)x - a(b-a)x^2 + o(x^2)$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)$$

$$\begin{cases} b-a=1 \\ -a(b-a)=\frac{1}{2} \end{cases} \quad \underline{a = -\frac{1}{2} \quad b = \frac{3}{2}}$$

(12.9)

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2} (x-a)^2 + o((x-a)^2)$$

$$\frac{1}{h^2} (f(a+h) + f(a-h) - 2f(a))$$

$$= \frac{1}{h^2} \left((f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2} h^2 + o(h^2)) + (f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2} h^2 + o(h^2)) - 2f(a) \right)$$

$$= \frac{1}{h^2} (f''(a) h^2 + o(h^2)) = f''(a) + o(1) \rightarrow f''(a) \quad (h \rightarrow 0)$$