

例 (3.5)

$$(1) \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } |a_m - a_n| < \varepsilon \quad (m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq N)$$

 $\varepsilon = 1, n = N$ とすると、

$$|a_m - a_N| < 1 \quad (m \in \mathbb{N}, m \geq N)$$

$$\text{よって } |a_m| = |a_m - a_N + a_N| \leq |a_m - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|$$

$$\text{つまり, } |a_m| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N|\}$$

だから $\{a_n\}$ は有界である。

$$(2) \bar{a}_n = \sup A_n \quad \underline{a}_n = \inf A_n$$

コーシーの収束条件において $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}, n = N$ とすると、

$$|a_m - a_N| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (m \in \mathbb{N}, m \geq N)$$

$$\text{よって } a_N - \frac{\varepsilon}{2} < a_m < a_N + \frac{\varepsilon}{2} \quad (m \geq N)$$

$$\text{よって } \sup A_m = \bar{a}_m < a_N + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\inf A_m = \underline{a}_m > a_N - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{だから, } \bar{a}_m - \underline{a}_m < a_N + \frac{\varepsilon}{2} - (a_N - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon \quad (m \geq N)$$

$$\text{つまり, } \bar{a}_n - \underline{a}_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

(3) $\{\bar{a}_n\}, \{\underline{a}_n\}$ がそれぞれ $\bar{a}, \underline{a} \quad (\bar{a}, \underline{a} \neq +\infty, -\infty)$ に収束することを示す。(1) より、 $\{a_n\}$ は有界だから、 $\{\bar{a}_n\}, \{\underline{a}_n\}$ は共に有界よって例 (3.4) (2) より、 $\{\underline{a}_n\}$ は左側単調増加 $\{\bar{a}_n\}$ は " 減少。 $\{\underline{a}_n\}$ において 上に有界な単調増加列は収束するから、 $\bar{a}$ の定義より、

$$\underline{a}_n \rightarrow \underline{a} \quad (\underline{a} \neq +\infty, -\infty, n \rightarrow \infty)$$

 $\{\bar{a}_n\}$ において、下に有界な減少列は収束するから、 $\bar{a}$ の定義より、

$$\bar{a}_n \rightarrow \bar{a} \quad (\bar{a} \neq +\infty, -\infty, n \rightarrow \infty)$$

つまり、(2) の結果から、

$$\bar{a}_n - \underline{a}_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \text{ より、}$$

$$\bar{a} - \underline{a} = 0 \quad \text{つまり } \bar{a} = \underline{a} \quad (\neq +\infty, -\infty)$$

 $\{a_n\}$ において、 $-\inf A_n \leq a_n \leq \sup A_n$ が成り立ち、

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf A_n = \underline{a} = \underline{a} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup A_n = \bar{a} = \bar{a} \\ \bar{a} = \underline{a} \quad (\neq +\infty, -\infty) \text{ より、} \end{cases}$$

はさみうちの原理から、 $a_n \rightarrow \bar{a} = \underline{a} \quad (\neq +\infty, -\infty)$ に収束する。

No. 9 問(6.1) ~ 問(6.5)

問(6.1) (1) 正の実数 ε, ε とする. $f(x) \rightarrow A$ ($x \rightarrow a$) という仮定より,

$$|f(x) - A| < \varepsilon_1 \quad (x \in E^*(a; \delta_1) \text{ のとき})$$

が成り立つ正数 δ_1 が取れる. この δ_1 が求めるもののひとつである. 実際,

$$M = \begin{cases} |A| + \varepsilon_1 & a \notin E \text{ のとき,} \\ \max\{|A| + \varepsilon_1, |f(a)|\} & a \in E \text{ のとき,} \end{cases} \quad \text{と定めると,}$$

$$|f(x)| \leq M \quad (x \in E \cap (a - \delta_1, a + \delta_1) \text{ のとき}) \quad \cdots (*)$$

が成り立つ. (*) より, $\delta = \delta_1$ のとき, f は $E \cap (a - \delta, a + \delta)$ 上有界である.(2) $A > 0$ であると仮定する. $f(x) \rightarrow A$ ($x \rightarrow a$) の ε - δ 方式の定義文で, $\varepsilon = A$ の場合を
考え, $|f(x) - A| < A \iff 0 < f(x) < 2A$ が成り立つから, $\delta = \delta_2$ のとき, 次が成り立つ.

$$f(x) > 0 \quad (x \in E^*(a; \delta) \text{ のとき})$$

(3) $\varepsilon_3 = |A| - C$ とおく. 仮定より, $\varepsilon_3 > 0$ である. $f(x) \rightarrow A$ ($x \rightarrow a$) の ε - δ 方式の定義
文で, $\varepsilon = \varepsilon_3$ の場合 ε を考え,

$$|f(x) - A| < \varepsilon_3 \quad (x \in E^*(a; \delta_3) \text{ のとき})$$

が成り立つ正数 δ_3 が取れることが分かる. この δ_3 が求めるもののひとつである.実際, $|f(x) - A| < \varepsilon_3$ をみたす $x \in E$ に対し,

$$|f(x)| = |A + f(x) - A| \leq |A| + |f(x) - A| > |A| - \varepsilon_3 = C$$

が成り立つから, $\delta = \delta_3$ のとき, 次が成り立つ.

$$|f(x)| > C \quad (x \in E^*(a; \delta) \text{ のとき})$$

問(6.2)

(1) (i) $\Rightarrow$ (ii) $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ なる ε を取る. このとき, (i) より, $\exists \delta; (*)_{\varepsilon, \delta}$ が成立.

$$\text{すなわち, } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\text{ここで, } \delta' = \min\{\delta, \delta_0\} \text{ とすると, } 0 < |x - a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) $\varepsilon > 0$ を取る. $\varepsilon' = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon\}$ とすると, (ii) より,

$$\exists \delta > 0 \text{ s.t. } (*)_{\varepsilon', \delta} \text{ かつ } (*)_{\varepsilon, \delta} \text{ が成り立つ.}$$

(2) $(\Leftarrow)$ $a_n \rightarrow a$ に収束する E 中の数列 a_n とする. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_0(a_n) = A$ が成り立つ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_0(a_n) = A \quad \text{よって} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow a)$$

 $(\Rightarrow)$ $a_n \rightarrow a$ に収束する $E \cap (a - \delta, a + \delta)$ 内の数列 a_n とすると, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A$ が成り立つ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_0(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A \quad \text{よって} \quad f_0(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow a)$$

問(6.3)

$\inf f(I) = A$ とおく. 正数 ε を任意にとる. A は $f(I)$ の最大下界であるから, A より大きい
 $A + \varepsilon$ は $f(I)$ の下界ではない. よって, $f(c) < A + \varepsilon$ である $c \in I$ が取れる. f は I 上
 広義単調増加であるから, $a < x < c$ である $x \in I$ に対し,

$$A \leq f(x) \leq f(c) < A + \varepsilon$$

が成り立つ. よって, $|f(x) - A| < \varepsilon \quad (x \in (a, c) \text{ のとき})$ が成り立つ. $\delta = c - a$ と定めれば, $\delta > 0$ かつ $(a, c) = (a, a + \delta)$

以上より、 $\varepsilon > 0$ である $\varepsilon \in \mathbb{R}$ に対して、正数 δ が存在して、

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (x \in I \text{ かつ } a < x < a + \delta \text{ のとき})$$

が成り立つことが分かった。すなわち $f(x) \rightarrow A \ (x \rightarrow a+0)$ である。

例 (6, 4)

(1) f は a 近くで有界であるから、

$$|f(x)| \leq M \quad (x \in E^*(a; \delta_1) \text{ のとき})$$

が成り立つ正の実数 M, δ_1 が取れる。 $h(x) = f(x)g(x)$ であるから、

$$-M|g(x)| \leq h(x) \leq M|g(x)| \quad (x \in E^*(a; \delta_1) \text{ のとき})$$

が成り立つ。 $g(x) \rightarrow 0 \ (x \rightarrow a)$ より、 $|g(x)| \rightarrow 0 \ (x \rightarrow a)$ 。それゆえ、

$x \rightarrow a$ のとき、 $-M|g(x)|, M|g(x)|$ は 0 に収束する。よってはさみうちの原理より、

$$h(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow a)$$

(2) $\beta \neq 0$ である。7. $g(x) \rightarrow \beta \ (x \rightarrow a)$ であるから、

$$|g(x) - \beta| < |\beta| \quad (x \in E^*(a; \delta_2) \text{ のとき})$$

が成り立つ正数 δ_2 が取れる。

($\Leftarrow$) $x \rightarrow a$ のとき、 $f(x)$ は実数 A に収束するとする。定理 (6, 11) (2) より、

$$h(x) = f(x)g(x) \rightarrow A\beta \quad (x \rightarrow a)$$

($\Rightarrow$) $x \rightarrow a$ のとき、 $h(x)$ は実数 B に収束するとする。

$x \in E^*(a; \delta_2)$ 上の函数として、 $f(x)$ は $x \rightarrow a$ のとき、 $\frac{B}{\beta}$ に収束する。よって、

E 上の函数として、 $f(x)$ は $x \rightarrow a$ のとき、 $\frac{B}{\beta}$ に収束する。

例 (6, 5)

(1) 対称性より、 $u > v$ とする。 $(u, v \in I)$

$$\begin{aligned} g(u) - g(v) &= f(u) + M(u-b) - \{f(v) + M(v-b)\} \\ &= f(u) - f(v) + M(u-v) \end{aligned}$$

条件より、 $f(u) - f(v) \geq -M(u-v)$ より、

$$\begin{aligned} g(u) - g(v) &= f(u) - f(v) + M(u-v) \geq -M(u-v) + M(u-v) = 0 \\ g(u) &\geq g(v) \end{aligned}$$

よって、 g は I 上広義単調増加する。

同様に、 $h(u) - h(v) = f(u) - f(v) - M(u-v)$

$$f(u) - f(v) \leq M(u-v) \text{ より、}$$

$$h(u) - h(v) = f(u) - f(v) - M(u-v) \leq M(u-v) - M(u-v) = 0$$

$$h(u) \leq h(v)$$

よって h は I 上広義単調減少する。

(2) $b - \delta < v < u < b$, $u - v < \frac{\varepsilon}{2M}$ とする。 $u, v, \delta \in \mathbb{R}$ とする。

$$\begin{aligned} |g(u) - g(v)| &\leq |f(u) - f(v) + M(u-v)| \\ &\leq |f(u) - f(v)| + M(u-v) \\ &\leq 2M(u-v) < \varepsilon \end{aligned}$$

No. 10 内(6,5) ~ 内(6,7), 内(7,1)

コーシーの収束条件より、 $x \rightarrow b-0$ のとき、 $g(x)$ は収束する。

$h(x)$ も同様。

$$b-\delta < x < b \quad b-x < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ とおけるように、} x \text{ をとる。}$$

$$|h(x) - g(x)| = |2M(b-x)| < \varepsilon$$

よって $|h(x) - g(x)| < \varepsilon$ ($b-\delta < x < b$) より、 $x \rightarrow b-0$ で $g(x)$ と $h(x)$ の極限は一致する。

$$(3) \quad -M(b-x) \leq 0 \leq M(b-x) \quad (a < x < b)$$

$$f(x) - M(b-x) \leq f(x) \leq f(x) + M(b-x)$$

$$\text{よって} \quad g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

はさみうちの原理より、 $x \rightarrow b-0$ のとき、 $f(x)$ は収束する。

内(6,6)

$$(1) \quad |f(u) - f(v)| < 1 \quad (u, v \in E^*(a; \delta_1))$$

$$|f(u)| = |(f(u) - f(v) + f(v))| \leq |f(u) - f(v)| + |f(v)| < 1 + |f(v)|$$

$$v = b = \text{一定} \text{ とする。} \quad b \in E^*(a; \delta_1) \text{ である。}$$

$$|f(u)| < 1 + |f(b)|$$

これが $\forall u \in E^*(a; \delta_1)$ で成り立つから、 f は $E^*(a; \delta_1)$ 上有界。

$$(2) \quad 0 < u < v < \delta_1 \text{ とする。}$$

$$E^*(a; u) \subset E^*(a; v) \text{ が成り立つから、}$$

$$\sup f(E^*(a; u)) \leq \sup f(E^*(a; v))$$

よって $M(t)$ は区間上広義単調減少する。

$$(3) \quad v = b \quad (b \in E^*(a; \delta_1)) \text{ のとき、} \forall \varepsilon_1 > 0 \text{ において、} |f(u) - f(b)| < \varepsilon_1$$

$$f(b) - \varepsilon_1 < f(u) < f(b) + \varepsilon_1$$

これが $\forall u \in E^*(a; \delta_1)$ において成り立つから、

$f(b) + \varepsilon_1$ は $f(u)$ の上界、 $f(b) - \varepsilon_1$ は $f(u)$ の下界。

$$\text{よって} \quad M(\delta) \leq f(b) + \varepsilon_1, \quad m(\delta) \geq f(b) - \varepsilon_1$$

$$\text{つまり、} \quad M(\delta) - m(\delta) \leq f(b) + \varepsilon_1 - f(b) + \varepsilon_1 = 2\varepsilon_1$$

$$2\varepsilon_1 = \varepsilon \text{ とする。} \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ をとると、} M(\delta) - m(\delta) \leq \varepsilon$$

上限、下限の定義から、 $0 \leq M(\delta) - m(\delta)$ は明らか

$$\text{よって} \quad 0 \leq M(\delta) - m(\delta) \leq \varepsilon$$

(4) (1) より、 f は $E^*(a; \delta_1)$ 上有界。よって、 $m(t), M(t)$ は有界。

また、(2) より、 $M(t), m(t)$ は区間上広義単調。つまり、 $m(t), M(t)$ は収束する。

ここで、内(1,2)の結果から、

$$0 \leq M(\delta) - m(\delta) < \varepsilon \quad (E^*(a; \delta))$$

$$\text{よって} \quad M(\delta) \rightarrow m(\delta) \quad (x \rightarrow a)$$

つまり、 $M(t), m(t)$ は $x \rightarrow a$ のとき極限値が一致する。

$$m(t) \leq f(x) \leq M(t) \quad (E^*(a; \tau))$$

よって、 $t \rightarrow 0$ のときはさみうちの原理から、 $f(x) \rightarrow A$ 。よって、 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は A に収束。

15) (6, 7)

$$(1) |f(x) - A| < \varepsilon', \quad |g(x) - B| < \varepsilon''$$

$$|f(x)g(x) - AB| = |f(x)(g(x) - B) + B(f(x) - A)|$$

$$\leq |f(x)| |g(x) - B| + |B| |f(x) - A|$$

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \leq |f(x) - A| + |A| < \varepsilon' + |A|$$

より、 $|f(x)|$ は有界だから、 $|f(x)| \leq M$ となる $M > 0$ が存在する。

$$\text{よって } |f(x)g(x) - AB| \leq M |g(x) - B| + |B| |f(x) - A|$$

$$\varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2(|B|+1)} \quad \text{とすると}$$

$$|f(x)g(x) - AB| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$(2) |g(x) - B| < \varepsilon'$$

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| = \left| \frac{B - g(x)}{Bg(x)} \right|$$

$$|g(x)| > \frac{|B|}{2} \quad \varepsilon' = \frac{\varepsilon |B|^2}{2} \quad \text{とすると}$$

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| = \left| \frac{B - g(x)}{Bg(x)} \right| < \frac{\frac{\varepsilon |B|^2}{2}}{2|B|} = \varepsilon$$

16) (7, 1)

($\Rightarrow$) f が a で連続とする。

$$\varepsilon > 0 \text{ に対し } \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

そこで、 $|t| < \delta$ とすると

$$|g(t)| = \sup \{ |f(x) - f(a)| : x \in E, |x - a| \leq t \}$$

$t < \delta$ より、

$$\sup \{ |f(x) - f(a)| : x \in E, |x - a| \leq t \} < \varepsilon$$

$$\therefore \text{a} \quad g(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +0)$$

($\Leftarrow$) $g(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +0)$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < t < \delta \text{ s.t. } |g(t)| < \varepsilon$$

$$|x - a| \leq t \text{ より、} |x - a| < \delta$$

$$|g(t)| < \varepsilon \text{ より、} \sup \{ |f(x) - f(a)| : x \in E, |x - a| \leq t \} < \varepsilon$$

$$\text{よって } |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

$$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ s.t. } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

これは f が a で連続であることを示す。

No. 11 問(7.2) ~ 問(7.4)

問(7.2)

$a \in \mathbb{R}$ に対して、定義より、 $[a] \leq a < [a] + 1$ が成り立つ。よって、 $x \neq 0$ のとき

$$\left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x} < \left[\frac{1}{x}\right] + 1, \quad x > 0 \text{ のときは、} x \text{ を倍して、}$$

$$f(x) = x \left[\frac{1}{x}\right] \leq 1 < x \left[\frac{1}{x}\right] + x = f(x) + x. \text{ すなわち、} -x < f(x) - 1 \leq 0$$

が $x > 0$ のとき成り立つ。 $x < 0$ のときは、 $f(x) \geq 1 > f(x) + x$ であるから、

$0 \leq f(x) - 1 < -x$ が成り立つ。したがって、 $x \in \mathbb{R}$ のとき、

$$|f(x) - 1| \leq |x|$$

が成り立つ。この不等式より、 f が 0 で連続であることが導かれる。

実際、正数 δ が任意に与えられたとき、正数 δ も $\delta = \varepsilon$ と定めると、

$$|f(x) - 1| < \varepsilon \quad (x \in \mathbb{R} \text{ から } |x - 0| < \delta \text{ のとき}) \text{ が成り立つ、}$$

問(7.3)

$$f(x) = \sin \frac{1}{x} - \sin \frac{x+1}{x} = -2 \sin \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{x}\right) = -2 \sin \frac{1}{2} \cos \frac{x+2}{2x}$$

$$a_n = \frac{2}{4n\pi - 1}, \quad b_n = \frac{2}{(4n+1)\pi - 1} \text{ とすると、} a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \text{ しか、}$$

$$f(a_n) \rightarrow -2 \sin \frac{1}{2}, \quad f(b_n) \rightarrow 0 \text{ よって極限が異なるから、} f \text{ は } 0 \text{ で不連続。}$$

問(7.4)

I 上の実数値関数 g も $g(x) = x - f(x)$ ($x \in I$) により定める。 f が I 上連続であるから、 g も I 上連続である。また、 $c \in I$ に対して同値 " $f(c) = c \Leftrightarrow g(c) = 0$ " が成り立つから、 $g(c) = 0$ である I の元 c が存在することと示せば充分である。

a は I の最小元であって、 $f(a) \in I$ であるから、 $g(a) = a - f(a) \leq 0$ 。同様に、

b は I の最大元かつ $f(b) \in I$ より、 $g(b) \geq 0$ 。 $g(a) = 0$ のときは、 $c = a$ のとき、

$f(c) = c$ が成り立ち、 $g(b) = 0$ のときは $c = b$ のとき、 $f(c) = c$ が成り立つ。 $g(a) \neq 0$ かつ

$g(b) \neq 0$ のときは、 $g(a) < 0 < g(b)$ であるから、中間値の定理より、 $g(c) = 0$ となる

$c \in (a, b)$ が存在する。

問(7.5)

$f(x) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow +\infty$) という仮定より、

$$f(a) < f(x) \quad (x \in I \text{ から } x > b_0 \text{ のとき}) \quad \cdots (*)$$

が成り立つ実数 b_0 が取れる。 $\max\{a, b_0\} < b$ である実数 b をとる。区間 $J = [a, b]$ 上でも f は連続であるから、 f は J 上の関数としての最小値をもつ。この最小値が J の元 c での値 $f(c)$ であるとする。この $f(c)$ は、 $J = [a, +\infty)$ 上の関数としての f の最小値である。それは、次の (i)、(ii) より分かる。 $x \in J$ とする。

$$(i) \quad a \leq x < b \text{ のとき、} x \in J \text{ であるから、} f(x) \geq \min f(J) = f(c)$$

$$(ii) \quad b < x \text{ のとき、このときは、} (*) \text{ と } a \in J \text{ より、} f(x) > f(a) \geq \min f(J)$$

問(7.6)

$I = [0, L]$ と定める. このとき, $f(I) = f(\mathbb{R})$ が成り立つ. というのは, $x \in \mathbb{R}$ に対して, $0 \leq x + nL$ となる最小の整数 n をとると, $x + (n-1)L < 0$ であるから, $0 \leq x + nL < L$ が成り立つ. 故に, $x + nL \in I$. また, 函数 f に対する仮定より, $f(x + nL) = f(x)$ が任意の $x \in \mathbb{R}$ と任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して成り立つ. よって,

$f(x) = f(x + nL) \in f(I)$. したがって, $f(\mathbb{R}) \subset f(I)$. $I \subset \mathbb{R}$ であるから, $f(I) \subset f(\mathbb{R})$. $f(I) = f(\mathbb{R})$ が示された.

また, f は $\mathbb{R}$ 上連続であるから, I 上でも連続である. I は有界閉区間であるから, $f(I)$ の最大元が存在する. $f(I) = f(\mathbb{R})$ であるから, $f(\mathbb{R})$ の最大元も存在する. すなわち, f は $\mathbb{R}$ 上の函数としての最大値をもつ.

問(7.8)

f は I 上連続であり, I は区間であるから, $a < b, c < d$ である. $a, b, c, d \in I$.

$\min\{a, c\} \leq x \leq \max\{b, d\}$ の任意の元 $x \in I$ で f は連続. つまり,

$\varphi(t) = (1-t)a + tc, \psi(t) = (1-t)b + td$ は $t \in [0, 1]$ で φ が連続である.

ここで, $F(x, y) = f(y) - f(x)$ ($x, y \in I, x < y$) とおくと,

$F(\varphi(t), \psi(t))$ は,

$$F(\varphi(t), \psi(t)) = f(\psi(t)) - f(\varphi(t)).$$

$f(\psi(t)), f(\varphi(t))$ は $t \in [0, 1]$ で連続より, $F(\varphi(t), \psi(t))$ は $[0, 1]$ で連続である. つまり, $f(b) - f(a)$ と $f(d) - f(c)$ との間の数はすべて S に属するため, 少なくとも1つの元が S に存在する.

問(7.9)

$I = [a, b]$ とし, $h(x) = g(x) - f(x)$ とする.

$f(I) \subset g(I)$ より,

$f(a) = \sup f(I) \leq \sup g(I) = g(\alpha)$ が成り立つ $a, b, \alpha, \beta \in I$ が存在する.

$f(b) = \inf f(I) \geq \inf g(I) = g(\beta)$

$$\begin{cases} g(\beta) \leq g(x) \leq g(\alpha) \\ f(b) \leq f(x) \leq f(a) \end{cases}$$

$h(x) = g(x) - f(x)$ とおくと,

$$\begin{cases} h(\alpha) = g(\alpha) - f(\alpha) \geq g(\alpha) - f(a) \geq 0 \\ h(\beta) = g(\beta) - f(\beta) \leq g(\beta) - f(b) \leq 0 \end{cases} \quad \text{となるため,}$$

中間値の定理から, α と β の間の点 c で

$h(c) = 0$ となるものが存在する. つまり, $g(c) = f(c)$ となる $c \in I$ が存在する.

No. 12 内(7, 10) 内(8, 1) ~ 外(8, 4)

内(7, 10)

区間 I における f の最大値を $f_{\max}$ とおき、
 最小値を $f_{\min}$

また、それぞれ、そのときの C_j を $C_{\max}$, $C_{\min}$ とおくと、
 f についての中間値の定理より、 $C_{\min}$ と $C_{\max}$ の間の数 C について、

 $f(C) = p$ が $f_{\min} \leq p \leq f_{\max}$ なる任意の p について成立。
よって $\sum_{j=1}^n a_j f(C_j)$ が p になりうる。

$$\textcircled{1} \quad f_{\min} = f_{\min} \sum_{j=1}^n a_j \leq \sum_{j=1}^n a_j f(C_j) \leq f_{\max} \sum_{j=1}^n a_j = f_{\max}$$

 $\therefore f(C) = \sum_{j=1}^n a_j f(C_j)$ なる C が存在する。

内(8, 1)

 E は区間、 f は E 上の実数値連続関数。さらに、 f は E 上単射であるとする。

 $S = \{f(y) - f(x) : x, y \in E \text{ かつ } x < y\}$ 。p. 62 問題 (7, 8) の結果と f が単射であることより、 S は区間。また、 f が単射であることより、 $0 \notin S$ 。区間の定義 (p. 42-43 (5, 2, 1))
より、同値 $0 \notin S \iff S \subset (-\infty, 0)$ あるいは $S \subset (0, +\infty)$
 が成り立つ。 $S \subset (-\infty, 0)$ のとき、 f は E 上狭義単調減少であり、 $S \subset (0, +\infty)$ のとき、 f は E 上狭義単調増加である。

内(8, 2)

$$(1) \quad u \leq v \iff g(u) \leq g(v)$$

対偶により、 $g(u) > g(v) \iff u > v$ を示せばよい。 $(u, v \in I)$ これは g が I 上狭義単調増加であることに他ならない。(2) (c) : $y \in g([a, b])$ も取る。このとき、 g は単調だから、

$$g(a) \leq y \leq g(b) \quad \text{故に、} \quad y \in [g(a), g(b)]$$

また、 $x \in [a, b]$ で $y = g(x)$ となるものが取れる。
 $[a, b] \in I$ だから $x \in I$ なのだから、 $y \in g(I)$
(つ) : $y \in [g(a), g(b)] \cap g(I)$ を取る。このとき $y \in g(I)$ より、 $\exists x \in I : y = g(x)$ また、 $g(a) \leq y \leq g(b)$ なのだから、(i) より、

$$a \leq x \leq b \quad \text{つまり、} \quad x \in [a, b]$$

よって $y \in g([a, b])$ (3) $g(a), g(b) \in I$ 、 $g(a) \leq g(b)$
 $g(I)$ が区間 $\Rightarrow [g(a), g(b)] \subset g(I)$

$$\text{よって} \quad [g(a), g(b)] \cap g(I) = [g(a), g(b)]$$

次に、 g が I 上連続であることを示す。

7

問(8.3)

(1) 単調増加関数の極限の性質 (p52 (6.8.2)) より, $c = \inf f(I)$, $d = \sup f(I)$. また, f が I 上狭義単調増加であるから, $f(I)$ の最小元も最大元も存在しない. 実際, $x \in I$ とすると, $a < x < b$ より, $a < \alpha < x < \beta < b$ である I の元 α, β が取れる. この α, β に対して, $f(\alpha) < f(x) < f(\beta)$ が成り立つ. 特に, $f(x)$ は $f(I)$ の最小元でも最大元でもない. このことが任意の $x \in I$ に対して成り立つから, $f(I)$ の最小元も最大元も存在しない. 中間値の定理の系 (7.4.2) より, $f(I)$ は区間である. 以下の結果と, p43 (5.2.2) の結果を合わせると, $f(I) = (c, d)$ であることが分かる.

?

問(8.4)

(1) (前半) $u, v \in \mathbb{R}$ から $u < v$ のとき

$$f(v) - f(u) = \frac{e^v - e^u}{2} - \frac{e^u - e^{-u}}{2} = \frac{e^v + e^{-u} - e^v - e^u}{2}$$

$$= \frac{1}{2} e^{v-u} (e^u + e^{-v}) - \frac{1}{2} (e^u + e^{-v}) = \frac{1}{2} (e^{v-u} - 1) (e^u + e^{-v})$$

$v - u > 0$ より, $e^{v-u} > e^0 = 1$. したがって, $e^{v-u} - 1 > 0$

よって, $f(v) - f(u) > 0$ $f(v) > f(u)$ ($v > u$)

つまり, f は $\mathbb{R}$ 上狭義単調増加する.

次に $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ も示す.

← かつ連続であること

f は $\mathbb{R}$ 上狭義単調増加より, $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow \infty$)

が成り立つのは $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ といえる.

よって, $e^x \rightarrow 0$, $e^{-x} \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow -\infty$) より,

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \infty \quad (x \rightarrow -\infty)$$

No. 13 15] (8, 4) ~ 15] (8, 5)

$$e^x \rightarrow \infty \quad e^{-x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty) \text{より}$$

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} +\infty$$

$$\therefore f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

$$(14) \cdot y = \sinh x \text{ とおくと, } y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$$

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

$$e^x \quad y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ において } e^x > 0 \text{ より, } e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

$$x = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

$$\text{よって } f^{-1}(y) = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

(2) $u, v \in \mathbb{R}$ かつ $0 \leq u < v$ のとき

$$\begin{aligned} g(v) - g(u) &= \frac{e^u + e^{-u}}{2} - \frac{e^v + e^{-v}}{2} = \frac{e^{v-u}}{2} (e^u - e^{-v}) - (e^u - e^{-v}) \\ &= \frac{1}{2} (e^{v-u} - 1)(e^u - e^{-v}) = \frac{e^{-u}}{2} (e^{v-u} - 1)(e^{u+v} - 1) \end{aligned}$$

$$v - u > 0, \quad u + v > 0 \text{ より } e^{v-u} > 1, \quad e^{u+v} > 1$$

$$\text{よって } g(v) - g(u) > 0 \quad g(v) > g(u)$$

つまり区間 $[0, +\infty)$ 上で g は狭義単調増加である。次に $g([0, +\infty)) = [1, +\infty)$ を証明する。

$$(i) \quad x = 0 \text{ のとき } g(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 \quad \text{よって } g(0) = 1$$

(ii) $x \in (0, +\infty)$ のとき

15] (8, 3) の結果から

$$g(x) \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow +0) \quad \text{①} \quad g(x) \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow +\infty) \quad \text{②}$$

を示せば g は区間 $(0, +\infty)$ 上で狭義単調増加であり、 $g([0, +\infty)) = [1, +\infty)$ がいえる。

$$\text{① において } x \rightarrow +0 \text{ のとき } e^x \rightarrow 1 \quad e^{-x} \rightarrow 1 \text{ より}$$

$$g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +0} \frac{1+1}{2} = 1$$

$$\text{② において } x \rightarrow +\infty \text{ のとき } e^x \rightarrow +\infty \quad e^{-x} \rightarrow 0 \text{ より}$$

$$g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\text{よって } g((0, +\infty)) = (1, +\infty)$$

(i) (ii) から $g([0, +\infty)) = [1, +\infty)$ がいえる。

区間 $(-\infty, 0]$ のときは、

$$g(-x) = g(x) \text{ より、 } u' = -u, v' = -v \text{ とする。}$$

(2) 0 初期の 各部分より、

$$0 \leq u < v \iff -v < -u \leq 0 \iff v' < u' \leq 0 \text{ のとき、}$$

$$g(u') = g(-v) = g(v) > g(u) = g(-u) = g(u')$$

$$\text{つまり、 } g(v') > g(u') \text{ (} u' > v' \text{)}$$

よって g は区間 $(-\infty, 0]$ 上で g は狭義単調減少、

$$\text{また、 } g((-\infty, 0]) = g([0, +\infty)) = [1, +\infty)$$

$$\text{よって } g((-\infty, 0]) = [1, +\infty) \text{ がいえる。}$$

最後に $\varphi(y), \psi(y)$ を求める。

$$y = \cosh x \text{ とすると、}$$

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} \quad \text{よって } e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

$$[0, +\infty) \text{ : } \varphi(y) = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

$$(-\infty, 0] \text{ : } \psi(y) = \log(y - \sqrt{y^2 - 1})$$

問(8,5)

$$(1) \operatorname{Arcsin} x = y \quad \operatorname{Arccos} x = z \text{ とおく。 } y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], z \in [0, \pi] \dots \textcircled{*}$$

$$x = \sin y = \cos z$$

$$\sin y = \cos(\frac{\pi}{2} - y) \text{ となる。}$$

$$x = \cos(\frac{\pi}{2} - y) = \cos z$$

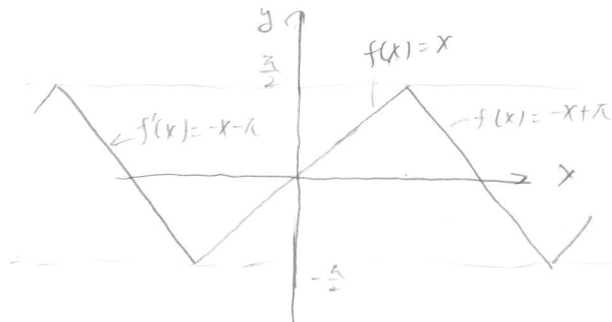
$$\therefore z = \frac{\pi}{2} - y + 2n\pi, \quad y = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\textcircled{*} \text{ を考慮すると、 } n=0 \text{ とおける。 } z = \frac{\pi}{2} - y$$

$$\therefore \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}$$

$$(2) f(x) = \operatorname{Arcsin}(\sinh x) \iff \sinh f(x) = \sinh x \iff f(x) = \begin{cases} x + 2n\pi \\ \pi - x + 2n\pi \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$x \in \mathbb{R} \text{ のとき } \sinh x \in [-1, 1] \text{ : } \operatorname{Arcsinh}([-1, 1]) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ となる。}$$



No. 14 内(8,6), 内(9,1) ~ 内(9,2)

内(8,6)

(1) $\text{Arc cos } x = \theta$ とおく。 $0 \leq \theta \leq \pi$ かつ $x = \cos \theta$ である。 $0 \leq \theta \leq \pi$ より、 $\sin \theta \geq 0$ 。 よって、

$$\sin(\text{Arc cos } x) = \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - x^2}$$

(2) $\text{Arc sin } x = \theta$ とおく。 $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$ かつ $x = \sin \theta$ である。 $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$ より、 $\cos \theta \geq 0$ 。 よって

$$\cos(\text{Arc sin } x) = \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - x^2}$$

(3) $x \in (-1, 1)$ とし、 $\text{Arc sin } x = \theta$ とおく。 $|x| < 1$ より、 $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ かつ $x = \sin \theta$ である。
 $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ より $\cos \theta > 0$ 。 よって

$$\tan(\text{Arc sin } x) = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(4) $x \in \mathbb{R}$ とし、 $\text{Arc tan } x = \theta$ とおく。 $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ かつ $x = \tan \theta$ である。 $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ より、 $\cos \theta > 0$ 。

$$\text{よって、} \sin(\text{Arc tan } x) = \sin \theta = (\tan \theta) \cos \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

内(9,1)

(1) $f'(c) > 0$ であるとする。 $x \rightarrow c$ のとき、 $\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ は $f'(c)$ に収束するから、次が成り立つ
正数 δ が取れる。

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \right| < f'(c) \quad (x \in I^*(c; \delta) \text{ のとき})$$

特に、 $x \in I^*(c; \delta)$ のとき、 $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$ である。 I は開区間である。 $c \in I$ であるから、 $I \cap (c - \delta, c)$ と $I \cap (c, c + \delta)$ はともに空ではない。 $\alpha, \beta \in \alpha \in I \cap (c - \delta, c)$, $\beta \in I \cap (c, c + \delta)$ とおいたように取る。 $u \in (\alpha, c)$ のとき、 $u \in I^*(c; \delta)$ であるから、 $0 < \frac{f(u) - f(c)}{u - c}$ 。 また、 $u < c$ より、 $u - c < 0$ よって $f(u) - f(c) < 0$ 。 すなわち、 $f(u) < f(c)$ 。 $v \in (c, \beta)$ のとき、 $0 < v - c$ かつ $0 < \frac{f(v) - f(c)}{v - c}$ 。 よって、 $0 < f(v) - f(c)$ 。 すなわち、 $f(c) < f(v)$ (2) (1) において $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0$ とおいただけ。

内(9,2)

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+2x} & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ x & (x < 0) \end{cases}$$

 $x > 0$ のとき、 $f(x) = \frac{x}{1+2x}$ 。 これは、明らかに微分可能である。 よってその導関数は

$$f'(x) = \frac{(1+2x) - x \cdot 2}{(1+2x)^2} = \frac{1}{(1+2x)^2}$$

 $x < 0$ のとき、 $f(x) = x$ 。 これも、明らかに微分可能。 よってその導関数は、

$$f'(x) = x = 1$$

 $x = 0$ のとき、 $x \rightarrow +0$ について、

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{x}{1+2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1+2x} = 1$$

$x \rightarrow -0$ について,

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x}{x} = 1$$

よ、 $f(x)$ は $x=0$ の点でも微分可能であり、その導関数 $f(x)$ は $f'(x) = f'(0) = 1$

$$(2) x^4 - x^3 = x^3(x-1)$$

$x^4 \geq x^3$ となるのは、 $x^3(x-1) \geq 0$ のときであって、 $x \geq 1$ 、 $x \leq 0$

$x^4 < x^3$ となるのは、 $x^3(x-1) < 0$ のときであって、 $0 < x < 1$

$$\text{つまり } f(x) = \begin{cases} x^3 & (x \geq 1, x \leq 0) \\ x^4 & (0 < x < 1) \end{cases}$$

$x > 1$ 、 $x < 0$ のとき $f(x) = x^3$ で微分可能であることは明らか。

$0 < x < 1$ のとき $f(x) = x^4$ で微分可能であることは明らか。

$x=1$ のとき $x \rightarrow 1+0$ について,

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x^2 + x + 1) = 3$$

$x \rightarrow 1-0$ について,

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x+1)(x^2+1) = 4$$

よ、 $x=1$ で微分可能ではない。

$x=0$ のとき、 $x \rightarrow +0$ について,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^4 - 0}{x} = 0$$

$x \rightarrow -0$ について

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x^3 - 0}{x} = 0$$

よ、 $x=0$ で微分可能

また、ある点 a をとると、その点での微分係数は、

$$f'(a) = \begin{cases} 3a^2 & (a > 1, a < 0) \leftarrow (\because f'(x) = 3x^2) \\ 4a^3 & (0 < a < 1) \leftarrow (\because f'(x) = 4x^3) \\ 0 & (a = 0) \end{cases}$$

No. 15 問(9.3) ~ 問(9.6)

問(9.3)

$$g(x) = f(x)^{p(x)}$$

$$\log g(x) = p(x) \log f(x)$$

$$g(x) = e^{p(x) \log f(x)}$$

$$h(x) = p(x) \log f(x) \text{ とおくと、}$$

$$\begin{cases} g(x) = e^{h(x)} \\ h(x) = p(x) \log f(x) \end{cases}$$

で指数関数及び対数関数は定義域のすべての点で微分可能であるから、合成関数の微分法より、 $g(x)$ は a で微分可能。

$$\begin{aligned} \therefore g'(x) &= e^{p(x) \log f(x)} \cdot (p(x) \log f(x))' \\ &= e^{p(x) \log f(x)} \cdot (p'(x) \log f(x) + p(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}) \end{aligned}$$

$x = a$ を代入して、

$$g'(a) = g(a) \cdot (p'(a) \log f(a) + p(a) \cdot \frac{f'(a)}{f(a)})$$

問(9.4)

$y = \text{Arcsin } x$ より $x = \sin y$ ($-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$)。逆関数の微分法より、 $\cos y > 0$ を考慮して、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$y = \text{Arctan } x$ より $x = \tan y$ ($-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$)。逆関数の微分法より、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

問(9.5)

(1) $f(x) = (a^x + b^x)^{\frac{1}{x}}$ の両辺に自然対数をとって、

$$\log f(x) = \frac{1}{x} \log(a^x + b^x)$$

両辺を x で微分すると、

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x^2} \log(a^x + b^x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{a^x \log a + b^x \log b}{a^x + b^x}$$

$$f'(x) = (a^x + b^x)^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{\log(a^x + b^x)}{x^2} + \frac{a^x \log a + b^x \log b}{x(a^x + b^x)} \right)$$

(2) $f(x) = y = \text{Arctan}(c \tan \frac{x}{2})$ とおくと、

$$\text{つまり、} \tan y = c \tan \frac{x}{2}$$

両辺を x について微分すると、

$$\frac{d}{dx} (\tan y) = \frac{d}{dx} (c \tan \frac{x}{2})$$

$$\frac{d}{dy} (c \tan y) \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (c \tan \frac{x}{2})$$

$$\frac{1}{\cos^2 y} \cdot \frac{dy}{dx} = c \cdot \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{c}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{c}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{1 + c^2 \tan^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{c}{2 (\cos^2 \frac{x}{2} + c^2 \sin^2 \frac{x}{2})} \end{aligned}$$

例 (9.6)

(1) $\mathbb{R}$ 上の函数 $g(t) = a^t$ を用いて、 $f(x)$ は $(0, +\infty)$ 上で、

$$f(x) = \frac{a^{\frac{1}{x}} - a^0}{\frac{1}{x} - 0} = \frac{g(\frac{1}{x}) - g(0)}{\frac{1}{x} - 0} \quad \text{とあらわされる。ここで、} \frac{1}{x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty)$$

かつ $t \rightarrow 0$ のとき、 $\frac{g(t) - g(0)}{t - 0}$ は $\frac{d}{dt} g(t) \big|_{t=0} = (\log a) \cdot a^0$ に収束するから、合成函数の極限の性質より、 $x \rightarrow +\infty$ のとき、 $f(x)$ は $\log a$ に収束する。

(2) $E = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 0\}$ 上で $f(x) = \frac{1}{x} (a^x - a^0) = \frac{1}{x} (b^x - b^0)$ が成り立つ。 $x \rightarrow 0$ のとき、 $\frac{1}{x} (a^x - a^0)$ は $\frac{d}{dx} a^x \big|_{x=0} = (\log a) a^0$ に収束し、 $\frac{1}{x} (b^x - b^0)$ は $\frac{d}{dx} b^x \big|_{x=0} = (\log b) b^0$ に収束する。よって $x \rightarrow 0$ のとき、 $f(x)$ は、

$$\left(\frac{d}{dx} a^x - \frac{d}{dx} b^x \right) \big|_{x=0} = \log a - \log b = \log \left(\frac{a}{b} \right) \quad \text{に収束する。}$$

(3) $E = \{x \in \mathbb{R}; 0 < |x| < 1\}$ とおく。 E 上で、

$$f(x) = \exp \left(\frac{1}{x} \log(1+x) \right) = \exp \left(\frac{1}{x} (\log(1+x) - \log(1+0)) \right)$$

であるから、函数 $f(x)$ は $(-1, 1)$ 上の函数 $g(t) = \log(1+t)$ を用いて、

$$f(x) = \exp \left(\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \right) \quad (x \in E)$$

とあらわされる。指数函数は定義域 $\mathbb{R}$ のすべての点で連続であって、函数 $g(t)$ は 0 で微分可能。よって、合成関数の極限についての性質より、 $x \rightarrow 0$ のとき $f(x)$ は収束し、その極限は、

$$\exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \right) = \exp \left(\frac{d}{dt} g(t) \big|_{t=0} \right) = \exp(g'(0)) = \exp(1) = e$$

(注) $t \in \mathbb{R}$ に対して $\exp(t) = e^t$ である。

$$(4) f(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$$

両辺に対数をとって、

$$\log f(x) = \frac{1}{x} \log \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)$$

No. 6 問(9.6) ~ 問(9.8)

$g(x) = \log\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)$ とおくと, $g(0) = \log\left(\frac{1+1}{2}\right) = \log 1 = 0$ であるから,

$$\log f(x) = \frac{1}{x} (g(x) - g(0)) = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \quad \text{とあらわされる。}$$

ここで, $g(x)$ は指数関数と対数関数の合成関数であるから, $g(x)$ は 0 で微分可能より, $x \rightarrow 0$ のとき $\log f(x)$ は収束して, その極限は,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{d}{dx} g(x) \Big|_{x=0} = g'(0) = \frac{\log a + \log b}{2} = \frac{1}{2} \log ab = \log \sqrt{ab}$$

つまり, $\lim_{x \rightarrow 0} \log f(x) = \log \sqrt{ab}$
 $\log \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \right) = \log \sqrt{ab} \quad (\because \log \text{ の連続性}) \leftarrow \text{あっているか分かりません。}$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \sqrt{ab} \quad (\because \log \text{ の 1 対 1 対応の関係から})$

問(9.7)

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は 問題の条件 (i), (ii) をみたすとする。 f は, C で微分可能であるから, 区間 (a, b) 上の実数値関数 $Q(x)$ で, 次の (iii), (iv) をみたすものが取れる。

$$(iii) \quad f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + Q(x)(x-c) \quad (x \in (a, b))$$

$$(iv) \quad \text{函数 } Q(x) \text{ は } C \text{ で連続かつ } Q(c) = 0$$

(iii) で $x = a_n$ の場合と, $x = b_n$ の場合を用いて,

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(c) + Q(b_n) \cdot \frac{b_n - c}{b_n - a_n} + Q(a_n) \cdot \frac{c - a_n}{b_n - a_n} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (*)$$

を得る。条件 (i) より, $|b_n - c| \leq |b_n - a_n|$; $|c - a_n| \leq |b_n - a_n|$ が成り立つ, $(n \in \mathbb{N})$

条件 (ii) とはさみうちの原理より, $b_n \rightarrow c$ ($n \rightarrow \infty$) かつ $a_n \rightarrow c$ ($n \rightarrow \infty$) である。

このことと上記 (iv) より,

$$Q(b_n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad \text{かつ} \quad Q(a_n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

また, 条件 (ii) と等式 (*) より, 次を得る,

$$\left| \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} - f'(c) \right| \leq |Q(b_n)| + |Q(a_n)|$$

この不等式の右辺は, $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束するから, はさみうちの原理より,

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} - f'(c) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad \text{すなわち,} \quad \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \rightarrow f'(c) \quad (n \rightarrow \infty)$$

問(9.8)

(i) $g(x)$ は a で微分可能より,

$$g(x) = g(a) + (x-a)g'(a) + (x-a)B(x) \quad \cdots \textcircled{1}$$

とかけ, $B(x)$ は a で連続かつ $B(a) = 0$ である。

①において, $g(a) = 0, g'(a) = 0$ より,

$$g(x) = (x-a)B(x) \quad \text{両辺に } f(x) \text{ をかけて}$$

$$h(x) = f(x)g(x) = (x-a)f(x)B(x) = (x-a)B_1(x) \quad \text{とかけ。}$$