NO.

DATE

No.1 問(1,2)〜問(1,5)

問(1,2)

(i) $\longrightarrow$ (ii)

$a \leqq b$ ならば $\forall \varepsilon > 0$ となる ε をとると、$a < b + \varepsilon$

(ii) $\longrightarrow$ (iii)

明らかに (iii) $\supset$ (ii) であるから、成り立つ。

(iii) $\rightarrow$ (i)

対偶を考える。つまり

$a > b \Longleftrightarrow$ ある正の実数 ε に対して $a > b + \varepsilon$ がなりたつことを示す。

問(1,3)

(1)(イ) まず、仮定 $A \subset B$ より、$L(A)$ と $L(B)$ との関係を求める

$l \in L(B) \Longleftrightarrow l$ は B の下界

$\Longleftrightarrow$ 任意の B の元 x に対して、$l \leqq x$ が成り立つ。

$\Longrightarrow$ 任意の A の元 x に対して $l \leqq x$ が成り立つ。

$\Longleftrightarrow l \in L(A)$

$L(A)$, $L(B)$ は $\mathbb{R}$ の部分集合であるから、$L(B) \subset L(A)$ である。

さて、B は下に有界であるとする。$\inf B$ は $L(B)$ の元であるから、$L(B) \subset L(A)$ より、$\inf B$ は $L(A)$ にも属す。特に、A の下界が存在する。すなわち、A は下に有界。また、$\inf A$ は $L(A)$ の最大元であるから、$\inf B \leqq \inf A$ が成り立つ。

(1)(ロ) B は上に有界であるとする。$\sup B$ は B の上界であるから、不等式 $x \leqq \sup B$ がすべての $x \in B$ に対して成り立つ。$A \subset B$ であるから、$x \in \sup B$ はすべての $x \in A$ に対して成り立つ。すなわち、$\sup B$ は A の上限である。A の上界が存在するから、A は上に有界。また、A の上限 $\sup A$ は $U(A)$ の最小元である。$\sup B \in U(A)$ を示しているから、$\sup A \leqq \sup B$ である。

(2) まず、$L(A \cup B)$ と $L(A)$, $L(B)$ との関係を求める。$l \in \mathbb{R}$ とする。

$l \in L(A \cup B) \Longleftrightarrow l$ は $A \cup B$ の下界

$\Longleftrightarrow l$ は A の下界かつ B の下界

$\Longleftrightarrow l \in L(A)$ かつ $L \in L(B)$

$\Longleftrightarrow l \in L(A) \cap L(B)$

この同値が、すべての実数 l に対して成り立ち、$L(A \cup B)$、$L(A)$、$L(B)$ は $\mathbb{R}$ の部分集合であるから、$L(A \cup B) = L(A) \cap L(B)$ である。

さて、A, B は下に有界であるとする。A, B の下限を、それぞれ α_A, α_B とあらわす。

$L(A) = (-\infty, \alpha_A]$、$L(B) = (-\infty, \alpha_B]$ であるから

$$L(A \cup B) = L(A) \cap L(B) = (-\infty, \alpha_A] \cap (-\infty, \alpha_B] = (-\infty, \min\{\alpha_A, \alpha_B\}]$$

よって $U(A\cup B)=[\max\{\beta_A, \beta_B\}, +\infty)$。したがって、$A\cup B$は上に有界であって、$A\cup B$の上限 $\sup(A\cup B)$は、$\max\{\beta_A, \beta_B\}=\max\{\sup A, \sup B\}$と一致する。

問(1.4)

(1) $\lambda>0$に対して $x\in L(A) \iff x$はAの下界

前半

$\iff$ Aの任意の元aに対して $a\geqq x$

$\iff$ Aの任意の元aに対して $\lambda a\geqq \lambda x$

$\iff \lambda x$はλAの下界 $\iff \lambda x\in L(\lambda A)$

この同値がすべての$x\in\mathbb{R}$に対して成り立つこと、及び$L(A)$、$L(\lambda A)$が$\mathbb{R}$の部分集合であることから、$L(\lambda A)=\lambda L(A)$であることが分かる。

$\inf A$はAの下限 $\iff L(A)=(-\infty, \inf A] \iff \lambda L(A)=(-\infty, \lambda\inf A]$

$\iff L(\lambda A)=(-\infty, \lambda\inf A] \iff \lambda\inf A$は$\lambda A$の下限

よって $\lambda\inf A=\inf(\lambda A)$

後半 $\lambda<0$に対して、$x\in U(A) \iff x$はAの上界

$\iff$ Aの任意の元aに対して $a\leqq x$

$\iff$ Aの任意の元aに対して $\lambda a\geqq \lambda x$

$\iff \lambda x$はλaの下界 $\iff \lambda x\in L(\lambda A)$

この同値がすべての$x\in\mathbb{R}$に対して成り立つこと、及び$U(A)$、$L(\lambda A)$が$\mathbb{R}$の部分集合であることから、$L(\lambda A)=\lambda U(A)$であることが分かる。

$\sup A$はAの上限 $\iff U(A)=[\sup A, \infty) \iff \lambda U(A)=(-\infty, \lambda\sup A]$

$\iff L(\lambda A)=(-\infty, \lambda\sup A] \iff \lambda\sup A$は$\lambda A$の下限。

よって $\inf(\lambda A)=\lambda\sup A$

(2)、(1)と同様

問(1.5)

(1) ($\Rightarrow$)は(2)で示す。以下は($\Leftarrow$)の部分の証明。

Cは有界であるとする。Aの元aをひとつ取る。$x\in A$のとき、$x-a\in C$であるから、$\inf C\leqq x-a\leqq \sup C$。すなわち、

$$a+\inf C\leqq x\leqq a+\sup C$$

が、すべてのAの元xに対して成り立つ。よって、$a+\inf C$はAの下界。$a+\sup C$はAの上界。それゆえ、Aは有界。

(2) Aは有界であるとする。$C=-C$であるから、Cが上に有界であるとき、Cも下に有界であって、$\inf C=\inf(-C)=-\sup C$が成り立つ。(p10の(1.8)を用いた) よって、Cの上限が$\sup A-\inf A$であることを示せば充分である。これを、p9 (1.7.1)の方針で示す。すなわち、次の①,②が成り立つことを示す。

① $\sup A-\inf A$はCの上界である。

② 任意の$v\in\mathbb{R}$に対して、"$v<\sup A-\inf A \Rightarrow v$はCの上界ではない"が成り立つ。

NO.

DATE

No. 2 問(1,5), 問(1,7)

①について $z \in C$ とする。$z = x - y$ となる $x, y \in A$ が取れる。

$\inf A \leqq x, y \leqq \sup A$ であるから、$z = x - y \leqq \sup A - \inf A$。不等式 $z \leqq \sup A - \inf A$ がすべての $z \in C$ に対して成り立つから、$\sup A - \inf A$ は C の上界である。

②について 実数 v について、$v < \sup A - \inf A$ が成り立つとする。$\varepsilon = \sup A - \inf A - v$ とおく。$0 < \varepsilon$ である。

$\inf A + \frac{1}{2}\varepsilon$ は $\inf A$ より大きいから、A の下界ではない。よって、$y < \inf A + \frac{1}{2}\varepsilon$ をみたす A の元 y が取れる。同様の理由で、$\sup A - \frac{1}{2}\varepsilon < x$ をみたす A の元 x も取れる。これらの x, y について、$x - y > (\sup A - \frac{1}{2}\varepsilon) - (\inf A + \frac{1}{2}\varepsilon) = \sup A - \inf A - \varepsilon = v$ が成り立つ。

$x - y \in C$ であるから、この不等式より、v は C の上界でないことが分かる。

以上より、$\sup A - \inf A$ は C の上限である。(1)の $(\Rightarrow)$ も示された。最後の部分を示す。

$x, y \in A$ とすると、$|x - y| = x - y$ あるいは $|x - y| = y - x$ であるから、$|x - y| \in C$ よって、$\{|x - y| ; x, y \in A\}$ は C の部分集合。特に、この集合は有界。この集合の上限を β とあらわす。$z \in C$ とすると、$z = x - y$ となる $x, y \in A$ が取れて $z = x - y \leqq |x - y| \leqq \beta$ が成り立つ。すなわち、β は C の上界。また、$\{|x - y| ; x, y \in A\}$ が C の部分集合であることから、$\beta \leqq \sup C$

合わせて、$\beta = \sup C$ であることが分かる。

問(1,7)

(1) $E = \dfrac{m}{m+n}$

E の上限が 1、下限が 0 であると推定する。

前半 上限が 1 であることの証明。

まず 1 が上界であることを示す。

$$\frac{m}{m+n} < \frac{m+n}{m+n} = 1 \quad (\forall m, n \in \mathbb{N})$$

次に、1 が上限であることの証明。

$$1 - \frac{m}{m+n} = \frac{n}{m+n}$$

m は自然数より、$m > nN \ (N \in \mathbb{N})$ が成り立つ m が存在する。

よって、$\dfrac{n}{m+n} < \dfrac{n}{nN+n} = \dfrac{1}{N+1}$

$N + 1 > \dfrac{1}{\varepsilon}$ となる N を1つとると、

$\dfrac{1}{N+1} < \varepsilon$ よって $1 - \varepsilon < \dfrac{m}{m+n}$ より $\dfrac{m}{m+n}$ の上限は 1 である。

後半 下限が 0 であることの証明

まず 0 が下界であることを示す。

$$\frac{m}{m+n} > 0 \quad (\because m, n > 0)$$

NO.

DATE

0が下限であることの証明
nは自然数より、$n > mN\ (N \in \mathbb{N})$が成り立つnが存在し、$N+1 > \frac{1}{\varepsilon}$となるNを1つとる.

$$\frac{m}{m+n} < \frac{m}{m+mN} = \frac{1}{N+1} < \varepsilon$$

よって $\frac{m}{m+n} < 0 + \varepsilon$ より、$\frac{m}{m+n}$ の下限は0である.

(2) $E = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+n}$

$0 - \varepsilon = -\varepsilon$

$\forall t < 0$

$\frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} < \frac{1}{m}$

Eの上限は1、下限が0であると推定する.

前半 Eの上限が1であることの証明.

まず、1が上界であることを示す.

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} < \frac{1}{m} \leqq 1 \quad (\because m \geqq 1,\ m, n \in \mathbb{N})$$

次に、1が上限であることの証明.

$$1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{m+n} < 1 + \frac{1}{m+n} = 1 + \frac{1}{1+\frac{n}{m}}$$

$\frac{n}{m} = N$とすると $1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{m+n} < 1 + \frac{1}{1+N}$

よって $\frac{1}{1+N} + 1 < \varepsilon$ なる Nをとると

$$1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{m+n} < \varepsilon$$

後半 Eの下限が0であることの証明.

まず 0が下界であることの証明.

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} > \frac{1}{m} - \frac{1}{m} = 0$$

次に 0が下限であることの証明.

mは自然数より、$m > nN\ (N \in \mathbb{N})$が成り立つ mが存在し、$N(N+1) < \frac{1}{\varepsilon}$ となるNを1つとる.

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} = \frac{n}{m(m+n)} < \frac{n}{nN(nN+n)} = \frac{1}{nN(N+1)} \leqq \frac{1}{N(N+1)} < \varepsilon$$

よって $\frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} < 0 + \varepsilon$ より、$\frac{1}{m} - \frac{1}{m+n}$ の下限は0である.

No. 3　問(2.1)〜問(2.5)

問(2.1)

(1) $a_n \to a\ (n\to\infty)$

$\Longleftrightarrow\ {}^\forall\varepsilon>0$、${}^\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $n\geqq N \Longrightarrow |a_n-a|<\varepsilon$

$\underset{\text{対偶}}{\Longleftrightarrow}\ |a_n-a|\geqq\varepsilon \longrightarrow n<N\ (n\in\mathbb{N})$

つまり、$\{n\in\mathbb{N}\ ;\ |a_n-a|\geqq\varepsilon\ ({}^\forall\varepsilon>0)\}$は有限集合.

(2)も同様。

問(2.2)

a_nがαに収束するとすると、

${}^\forall\varepsilon>0$、${}^\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $n\geqq N\ \ |a_n-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$

また、$n\geqq N \Longrightarrow n+k>n\geqq N$ より、

${}^\forall\varepsilon>0$、${}^\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $n\geqq N\ \ |a_{n+k}-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$ も同様に成り立つ。

ここで、$|a_{n+k}-a_n|=|(a_{n+k}-\alpha)+(\alpha-a_n)|$

$\leqq|a_{n+k}-\alpha|+|a_n-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

よって $|a_{n+k}-a_n|<\varepsilon$

つまり、$\underline{a_{n+k}-a_n\to 0\ (n\to\infty)}$

問(2.3)

(1) $a_n\to a\ (n\to\infty)$ より、

${}^\forall\varepsilon>0$、${}^\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $n\geqq N\ \ |a_n-a|<\varepsilon$

ここで、$||a_n|-|a||\underset{\uparrow}{\leqq}|a_n-a|<\varepsilon\ \ (n\geqq N)$

問(1,1)(4)

よって $|a_n|\to|a|\ (n\to\infty)$

(2) $a_n\to a\ (n\to\infty)$、$b_n\to b\ (n\to\infty)$ より、

${}^\forall\varepsilon>0$、${}^\exists N_1\in\mathbb{N}$ s.t. $n\geqq N_1\ \ |a_n-a|<\varepsilon$

${}^\forall\varepsilon>0$、${}^\exists N_2\in\mathbb{N}$ s.t. $n\geqq N_2\ \ |b_n-b|<\varepsilon$

よって $n\geqq\max\{N_1,N_2\}$ において

$|\min\{a_n,b_n\}-\min\{a,b\}|\underset{\uparrow}{\leqq}\max\{|a_n-a|,|b_n-b|\}<\varepsilon$

問(1,6)

つまり、$|\min\{a_n,b_n\}-\min\{a,b\}|<\varepsilon$

よって $\min\{a_n,b_n\}\to\min\{a,b\}\ (n\to\infty)$

(3) 前半は(2)と同様

$n\geqq\max\{N_1,N_2\}$ において

$|\max\{a_n,b_n\}-\max\{a,b\}|\underset{\uparrow}{\leqq}\max\{|a_n-a|,|b_n-b|\}<\varepsilon$

問(1,6)

つまり、$|\max\{a_n,b_n\}-\max\{a,b\}|<\varepsilon$

よって $\max\{a_n,b_n\}\to\max\{a,b\}\ (n\to\infty)$

問(2.4)

(1) ($\Rightarrow$) $a_n \to +\infty$ $(n\to\infty)$ が成り立つと仮定する。仮定より、

$$0 < a_n \quad (n\in\mathbb{N} \text{ かつ } n \geqq n_0 \text{ のとき})$$

が成り立つ自然数 n_0 がとれる。$n \geqq n_0$ のとき、$a_n > 0$ であるから、有限個の n を除いて $a_n > 0$ が成り立つ。もう一つの条件もみたされることを証明する。正数 ε が任意に与えられたとする。このとき、仮定より、

$$a_n > \frac{1}{\varepsilon} \quad (n\in\mathbb{N} \text{ かつ } n \geqq N \text{ のとき})$$

が成り立つ自然数 N が取れる。$n \geqq N$ である $n\in\mathbb{N}$ に対して $0 < \frac{1}{a_n} < \varepsilon$ が成り立つ。以上より、$\varepsilon > 0$ である実数 ε に対して、

$$\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| < \varepsilon \quad (n\in\mathbb{N} \text{ かつ } n \geqq N \text{ のとき})$$

が成り立つような自然数 N が取れることが分かった。すなわち、

$$\frac{1}{a_n} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

($\Leftarrow$) 右側の条件が成り立つと仮定する。この仮定より、

$$a_n > 0 \quad (n\in\mathbb{N} \text{ かつ } n \geqq n_0 \text{ のとき})$$

が成り立つような自然数 n_0 が取れる。$a_n \to +\infty$ $(n\to\infty)$ の証明に入る。
実数 M が任意に与えられたとする。$\frac{1}{1+|M|}$ は正の実数であるから、$\frac{1}{a_n} \to 0$ $(n\to\infty)$ という仮定より、$\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| < \frac{1}{1+|M|}$ $(n\in\mathbb{N}$ かつ $n \geqq n_1$ のとき$)$

が成り立つ自然数 n_1 が取れる。$N = \max\{n_0, n_1\}$ と定める。自然数 n が $n \geqq N$ をみたすとすると、$n \geqq N \geqq n_0$ より、$a_n > 0$ が成り立つ。それゆえ、このとき、同値

$$\left|\frac{1}{a_n}\right| < \frac{1}{1+|M|} \iff 1+|M| < a_n$$

が成り立つ。また、$M < 1+|M|$ も成り立つから、

$$a_n > M \quad (n\in\mathbb{N} \text{ かつ } n \geqq N \text{ のとき}) \quad \cdots (*)$$

が成り立つ。以上より、実数 M に対して、$(*)$ が成り立つ自然数 N が存在することがわかった。すなわち $a_n \to +\infty$ $(n\to\infty)$

(2) $b_n = -a_n$ とすれば (1) と同様。

(3) (1) と (2) の組み合わせに他ならない。

問(2.5)

(1) 対偶をとる。$\{a_n + b_n\}$ が収束する。$\Rightarrow$ $\{b_n\}$ は収束する。である。

$a_n + b_n \to c$ $(n\to\infty)$ とすると、$a_n \to a$ $(n\to\infty)$ より、

$b_n = a_n + b_n + (-a_n) \to c + (-a)$ よって $b_n \to c - a$ $(n\to\infty)$ となる。

これは $\{b_n\}$ が収束することを示している。(定理(2.3)より)

NO.
DATE

No.4　問(2.5)〜問(2.7)

(2) これは、$a \neq 0$ のとき、$\{a_n b_n\}$ は収束する $\Rightarrow$ $\{b_n\}$ は収束する と同値

$a_n b_n \to d\ (n \to \infty)$ とすると、$a_n \to a\ (n \to \infty)$ より、

$b_n = a_n b_n \times \dfrac{1}{a_n} \longrightarrow d \times \dfrac{1}{a}$　　$b_n \to \dfrac{d}{a}\ (n \to \infty)$ がいえる。

これは $\{b_n\}$ が収束することを示している。(定理(2.3)より)

問(2.6)(1)

$a_n \to a (n \to \infty) \Longleftrightarrow$ (i) かつ (ii)

($\Rightarrow$)　$a_n \to a\ (n \to \infty)$ より、

$\forall \varepsilon > 0,\ {}^{\exists}N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geqq N$　$|a_n - a| < \varepsilon$ …(＊)

$2n, 2n-1 \geqq n \geqq N$ より、

(＊)の n を $2n, 2n-1$ に変えても(＊)が成り立つから、

$\begin{cases} |a_{2n} - a| < \varepsilon \\ |a_{2n-1} - a| < \varepsilon \end{cases}$ $(n \geqq N)$　つまり、$\begin{cases} a_{2n} \to a \\ a_{2n-1} \to a \end{cases}$ $(n \to \infty)$

($\Leftarrow$) $a_{2n} \to a\ (n \to \infty)$, $a_{2n-1} \to a (n \to \infty)$ より、

$\forall \varepsilon > 0,\ {}^{\exists}N_1 \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geqq N_1$　$|a_{2n} - a| < \varepsilon$ … ①

$\forall \varepsilon > 0,\ {}^{\exists}N_2 \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geqq N_2$　$|a_{2n-1} - a| < \varepsilon$ … ②

$N_3 = \max\{N_1, N_3\}$ とおくと、$n \geqq N_3$ について、①と②が成り立つ。

$\sum_{n=N_3}^{\infty} a_{2n} + \sum_{n=N_3}^{\infty} a_{2n-1} = \sum_{n=N_3} (a_{2n} + a_{2n-1}) = (a_{2N_3-1} + a_{2N_3}) + (a_{2N_3+1} + a_{2N_3+2}) + \cdots$

$= \sum_{n=2N_3-1}^{\infty} a_n$

つまり、①、②が $n \geqq N_3$ について成り立つということは $n \geqq 2N_3 - 1$ において

①、②を合わせると、

$|a_n - a| < \varepsilon$　$(n \geqq 2N_3 - 1)$ が成り立つことになる。

つまり、$a_n \to a\ (n \to \infty)$ が成り立つ。

次に　(i) かつ (ii) $\Longleftrightarrow$ (i) かつ (iii) を示す。

($\Rightarrow$) $a_{2n} \to a (n \to \infty) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ {}^{\exists}N_4 \in \mathbb{N}$　s.t. $|a_{2n} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$a_{2n-1} \to a (n \to \infty) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ {}^{\exists}N_5 \in \mathbb{N}$　s.t. $|a_{2n-1} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

よって $\max\{N_4, N_5\} \leqq n$ において

$|a_{2n} - a_{2n-1}| = |(a_{2n} - a) + (a - a_{2n-1})| \leqq |a_{2n} - a| + |a_{2n-1} - a|$

$< \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

よって　$a_{2n} - a_{2n-1} \to 0$　$(n \to \infty)$

($\Leftarrow$) $a_{2n} - a_{2n-1} \to 0\ (n \to \infty) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ {}^{\exists}N_6 \in \mathbb{N}$ s.t. $|a_{2n} - a_{2n-1}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\max\{N_5, N_6\} \leqq N$ において、

$|a_{2n} - a| = |a_{2n-1} - a + (a_{2n} - a_{2n-1})| \leqq |a_{2n-1} - a| + |a_{2n} - a_{2n-1}| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

よって　$a_{2n} \to a$　$(n \to \infty)$

$\therefore$ $a_n \to a (n \to \infty) \Longleftrightarrow$ (i) かつ (ii) $\Longleftrightarrow$ (i) かつ (iii)

NO.

DATE

(2) $a_n \to a\ (n\to\infty) \iff$ (iv) かつ (v)

(⇒) $\forall\varepsilon>0,\ ^{\exists}N_1\in\mathbb{N}$ s.t. $n\geqq N_1,\ |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$ …①

$n\geqq N_1 \Rightarrow \ell n \geqq \ell N_1 > N_1\ (\ell>1)$ より、

①のnをℓnに変えたときも①は成り立つから、

$|a_{\ell n}-a|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon\ (n\geqq N_1)$ つまり、$a_{\ell n}\to a\ (n\to\infty)$

同様に、$n\geqq N_1 \Rightarrow n+1\geqq N_1+1>N_1$ より、

①のnを$n+1$に変えたときも①は成り立つから、

$|a_{n+1}-a|<\frac{\varepsilon}{2}$ …②

よって $|a_{n+1}-a_n| = |(a_{n+1}-a)+(a-a_n)| \leqq |a_{n+1}-a|+|a-a_n|$
$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \quad (n\geqq N_1)$

つまり、$a_{n+1}-a_n\to 0\ (n\to\infty)$

(⇐) (v)より

$\forall\varepsilon>0,\ ^{\exists}N_2\in\mathbb{N}$ s.t. $n\geqq N_2,\ |a_{n+1}-a_n|<\frac{\varepsilon}{2(\ell-1)N}$

よって $|a_{\ell n}-a_n| = |(a_{\ell n}-a_{\ell n-1})+(a_{\ell n-1}-a_{\ell n-2})+\cdots+(a_{n+1}-a_n)|$
$\leqq |a_{\ell n}-a_{\ell n-1}|+|a_{\ell n-1}-a_{\ell n-2}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|$
$< \frac{\varepsilon}{2(\ell-1)N}\cdot(\ell-1)N=\frac{\varepsilon}{2}$

$\therefore |a_{\ell n}-a_n|<\frac{\varepsilon}{2}\ (n\geqq N_2)$ …③

(iv)より

$\forall\varepsilon>0,\ ^{\exists}N_3\in\mathbb{N}$ s.t. $n\geqq N_3$ $|a_{\ell n}-a|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\max\{N_2, N_3\}\leqq n$ において

$|a_n-a|=|(a_{\ell n}-a)+(a_n-a_{\ell n})|\leqq|a_{\ell n}-a|+|a_n-a_{\ell n}|$
$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

つまり $a_n\to a\ (n\to\infty)$

$\therefore a_n\to a\ (n\to\infty) \iff$ (iv) かつ (v)

問(2.7)

(1) $a=\frac{1}{x}$ とおくと、$\left|\frac{1}{x}\right|<1$ $|x|>1$

$x>0$ のとき $x>1$ であるから $x=1+h$ とおくと、$h>0$ より、

$|a_n|=\left|\frac{c}{x^n}\right|=\frac{c}{(1+h)^n}<\frac{c}{1+nh}<\frac{c}{nh}$

$N>\frac{c}{\varepsilon h}$ となるNをとると $n\geqq N$ において、

$|a_n|<\frac{c}{nh}\leqq\frac{c}{Nh}<\varepsilon$ つまり、$a_n\to 0\ (n\to\infty)$

$x<0$ のとき $x=-t$ とおくと、$t>1$ で

$a=-\frac{1}{t}$ より $|a_n|=\left|\frac{c}{(-t)^n}\right|=\left|\frac{c}{(-1)^n t^n}\right|=\frac{c}{t^n}$

NO.
DATE

No.5　問(2.7)〜問(2.11)

$t=1+h$とおくと、同様にして、　$a_n \to 0\ (n\to\infty)$

よって $|a|<1 \Rightarrow a_n \to 0\ (n\to\infty)$

(2) $|a|=1+h$とおくと　$(h>0)$

$$|a_n|=|ca^n|=|c||a|^n=|c|(1+h)^n>|c|(1+nh)>n|c|h$$

アルキメデスの原理より、$n|c|h>k\ (\forall k\in\mathbb{R})$となる$n$が存在する。

よって　$|a_n|>k$

つまり、　$|a_n| \to +\infty\ (n\to\infty)$

問(2.8)

(1) $0\leqq r<1$

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to r\ (n\to\infty)$より、$\forall \varepsilon>0$、$\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n\geqq N$ $\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|-r\right|<\varepsilon$

$$r-\varepsilon<\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<r+\varepsilon$$

$r+\varepsilon=r'$として　$r<r'<1$ のようにr'をとると、

$n\geqq N$のとき

$$0<|a_n|<r'|a_{n-1}|<\cdots<(r')^{n-N}|a_N|=\frac{|a_N|}{(r')^N}(r')^n$$

$0<r'<1$より、$(r')^{n-N}|a_N| \to 0\ (n\to\infty)$

よってはさみうちの原理より、$|a_n|\to 0$　$(n\to\infty)$

つまり、　$a_n\to 0\ (n\to\infty)$

(2)　(1)で$r-\varepsilon=r'$とし、$1<r'<r$とすると、

$n\geqq N$で　$|a_{n+1}|>r'|a_n|$

$$|a_n|>r'|a_{n-1}|<\cdots<(r')^{n-N}|a_N|=\frac{|a_N|}{(r')^N}(r')^n \underset{r'>1}{\to} \infty\ (n\to\infty)\text{より、}$$

(2.4.2)の定理から、$|a_n|\to+\infty$　$(n\to\infty)$

問(2.9)

示すことが要求されているのは、

$\{n\in\mathbb{N};\ a_n\leqq b_n\}$が無限集合 $\Rightarrow$ $a\leqq b$

という主張である。この主張の対偶は、

$a>b \Rightarrow \{n\in\mathbb{N};\ a_n\leqq b_n\}$は有限集合

である。以下でこれを示す。$a>b$であるとする。$\varepsilon=\frac{1}{2}(a-b)$とおく。$\varepsilon>0$である。

$a_n\to a\ (n\to\infty)$及び $b_n\to b\ (n\to\infty)$という仮定より、

$|a_n-a|<\varepsilon$　　($n\in\mathbb{N}$ かつ $n\geqq N_1$ のとき)

$|b_n-b|<\varepsilon$　　($n\in\mathbb{N}$ かつ $n\geqq N_2$ のとき)

が成り立つ自然数 N_1, N_2 が取れる。$N=\max\{N_1,N_2\}$とおく。

$n\in\mathbb{N}$が、$n\geqq N$をみたすとすると、$n\geqq N_1$ かつ $n\geqq N_2$であるから、

$$b_n < b+\varepsilon = \frac{1}{2}(a+b) = a-\varepsilon < a_n$$

が成り立つ。よって、$\{n \in \mathbb{N} ; a_n \leqq b_n\} \subset \{n \in \mathbb{N} ; n < N\}$。特に、$\{n \in \mathbb{N} ; a_n \leqq b_n\}$ は有限集合。

問(2.10)

(1) $n=N$ のときは $\frac{a_n}{a_N} = 1 = \frac{b_n}{b_N}$ となり、(1)の不等式は成り立つ。次に $n>N$ である場合を考える。仮定より、$N \leqq k \leqq n-1$ のとき、

$$0 < a_k, \quad 0 < b_k \text{ かつ } 0 < \frac{a_{k+1}}{a_k} \leqq \frac{b_{k+1}}{b_k} \text{ が成り立つから、}$$

$$\frac{a_n}{a_N} = \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdots\cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqq \frac{b_{N+1}}{b_N} \cdot \frac{b_{N+2}}{b_{N+1}} \cdots\cdots \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_n}{b_N}$$

となり、(1)の不等式が成り立つことが分かる。

(2) $b_n \to 0\ (n \to \infty)$ であるとする。(1)より、次が成り立つ

$$0 < a_n \leqq \frac{a_N}{b_N} b_n \quad (n \in \mathbb{N} \text{ かつ } n \geqq N \text{ のとき}) \cdots (*)$$

$b_n \to 0\ (n \to \infty)$ より、$\frac{a_N}{b_N} b_n \to 0\ (n \to \infty)$。不等式$(*)$は有限個の n を除いて成り立つから、はさみうちの原理より、$a_n \to 0\ (n \to \infty)$ である。

(3) $a_n \to +\infty\ (n \to \infty)$ であるとする。(1)より次が成り立つ。

$$\frac{b_N}{a_N} a_n \leqq b_n \quad (n \in \mathbb{N} \text{ かつ } n \geqq N \text{ のとき}) \quad \cdots (**)$$

これを用いて、$b_n \to +\infty\ (n \to \infty)$ を示す。実数 M が任意に与えられたとする。$a_n \to +\infty\ (n \to \infty)$ であるから、

$$\frac{a_N}{b_N} M \leqq a_n \quad (n \in \mathbb{N} \text{ かつ } n \geqq n_0 \text{ のとき}) \cdots (***)$$

が成り立つ自然数 n_0 が取れる。$N' = \max\{n_0, N\}$ と定めると、$n \geqq N'$ である $n \in \mathbb{N}$ に対して、$(**)$ と $(***)$ より、

$$M = \frac{b_N}{a_N} \cdot \frac{a_N}{b_N} M \leqq \frac{b_N}{a_N} a_n \leqq b_n$$

が成り立つ。$b_n \to +\infty\ (n \to \infty)$ が示された。

問(2.11)

(1) 有限個の n を除いて $1+\frac{c}{n} \leqq \frac{a_{n+1}}{a_n}$ が成り立つと仮定する。この仮定より、

$$1+\frac{c}{n} \leqq \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n \in \mathbb{N} \text{ かつ } n \geqq N \text{ のとき}) \quad \cdots (*)$$

が成り立つ自然数 N が取れる。$0 < c$ より、$1 < mc$ である自然数 m が取れる。(アルキメデスの原理)。$(*)$と二項定理より、$n \geqq N$ のとき

NO.

DATE

No.6 問(2.11)〜問(2.14)

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^m \geqq \left(1+\frac{c}{n}\right)^m \geqq 1+\frac{mc}{n} \geqq 1+\frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$$

が成り立つ.数列$\{n\}$と$\{(a_n)^m\}$に対して問題(2.10)の(1)の結果を適用して,

$$(a_n)^m \geqq \frac{(a_N)^m}{N} n \quad (n \in \mathbb{N} \text{ かつ } n \geqq N \text{ のとき})$$

が成り立つことが分かる。この不等式より、$a_n \to +\infty \ (n \to \infty)$であることを導く。
実数Mが任意に与えられたとする。アルキメデスの原理より、

$|M|^m < \frac{(a_N)^m}{N} n_1$ をみたす自然数n_1が取れる。$N' = \max\{N, n_1\}$と定める。

$n \geqq N'$である$n \in \mathbb{N}$に対して,

$$(a_n)^m \geqq \frac{(a_N)^m}{N} n \geqq \frac{(a_N)^m}{N} n_1 > |M|^m$$

が成り立つ。同値"$(a_n)^m > |M|^m \Longleftrightarrow a_n > |M|$"と$M \leqq |M|$より、

$$a_n > M \quad (n \in \mathbb{N} \text{ かつ } n \geqq N' \text{ のとき}) \quad \cdots (**)$$

が成り立つ。以上より,実数Mが与えられたとき、Mが何であっても$(**)$が成り立つ自然数N'が取れることが分かった.すなわち.$a_n \to +\infty \ (n \to \infty)$であることが示された。
(2)も同様の方法でやる.

問(2.12)

$(a_n)^n \geqq 1$であり、$a_n > 0$であるから,$a_n \geqq 1$が任意の$n \in \mathbb{N}$について成り立つ。
よって$a_n = 1 + h_n$とおくと、$h_n \geqq 0$。また、$n \geqq (a_n)^n$より,

$$n \geqq (1+h_n)^n \geqq 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 > \frac{n(n-1)}{2} h_n^2$$

$$h_n^2 \leqq \frac{2}{n-1}$$

$N - 1 > \frac{2}{\varepsilon^2}$となる$N \in \mathbb{N}$をとると、$n \geqq N$のとき.

$$h_n^2 \leqq \frac{2}{n-1} \leqq \frac{2}{N-1} < \varepsilon^2 \qquad h_n^2 < \varepsilon^2$$

$h_n \geqq 0$より, $|h_n| \leqq \varepsilon$ よって $h_n \to 0 \ (n \to \infty)$

$a_n = 1 + h_n$より, $a_n \to 1 \ (n \to \infty)$

問(2.13)

(1) nは自然数,二項定理より,

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{a}{n}\right)^k \text{ であるから、}$$

$$\left|\left(1+\frac{a}{n}\right)^n - 1\right| \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{|a|^k}{n^k} \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}|a|^k$$

NO.

DATE

$k \geqq 1$ のとき、$k! = k \cdot (k-1) \cdots 2 \geqq 2^{k-1}$ であるから、$|a| < 2$ のとき、

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}|a|^k = |a| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}|a|^{k-1} = |a| \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{|a|}{2}\right)^{k-1} = |a| \cdot \frac{1-\left(\frac{|a|}{2}\right)^n}{1-\frac{|a|}{2}} \leqq \frac{|a|}{1-\frac{|a|}{2}}$$

以上より、(1)の不等式を得る。

(2) $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ であると仮定する。仮定より、

$$|a_n| < 1 \quad (n \in \mathbb{N} \text{ かつ } n \geqq N \text{ のとき})$$

が成り立つ自然数 N が取れる。(1)の結果より、

$$|b_n - 1| \leqq 2|a_n| \quad (n \in \mathbb{N} \text{ かつ } n \geqq N \text{ のとき})$$

である。仮定より、$2|a_n| \to 0$ $(n \to \infty)$ よって、はさみうちの原理より、

$|b_n - 1| \to 0$ $(n \to \infty)$ すなわち、$b_n \to 1$ $(n \to \infty)$

問(2, 14)

(1) $a_n = \dfrac{a^n}{n^k}$, $a_{n+1} = \dfrac{a^{n+1}}{(n+1)^k}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)^k} \cdot \frac{n^k}{a^n}\right| = \left|a \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^k\right| = \left|a\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^k\right| \xrightarrow{n\to\infty} |a|$$

問(2, 8)の結果より、

$0 \leqq |a| < 1$ のとき、$a_n \to 0$ $(n \to \infty)$

$a > 1$ のとき　$a_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$

$a < -1$ のとき　$a = -t$ とおくと、$t > 1$ であり、

$$n = 2l \text{ で } a_{2l} = \frac{(-t)^{2l}}{(2l)^k} = \frac{t^{2l}}{(2l)^k} \longrightarrow +\infty \quad (n \to \infty)$$

$$n = 2l-1 \text{ で } a_{2l-1} = \frac{(-t)^{2l-1}}{(2l-1)^k} = -\frac{t^{2l-1}}{(2l-1)^k} \longrightarrow -\infty \quad (n \to \infty)$$

つまり、発散するが、$+\infty$, $-\infty$ に発散するわけではない。

$a = 1$ のとき、$a_n = \dfrac{1}{n^k}$ より、$a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ $\Longleftarrow$ 別解 問(2, 11)の結果もつかえる

$a = -1$ のとき　$a_n = (-1)^n \cdot \dfrac{1}{n^k}$ より　$a_n \to 0$ $(n \to \infty)$

(2) $a_n = \dfrac{a^n}{n!}$　$a_{n+1} = \dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n}\right| = \left|\frac{a}{n+1}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

よって問(2, 8)の結果より、$a_n \to 0$ $(n \to \infty)$

(3) $a_n = 3^n + n^2(-2)^n = 3^n\left(1 + n^2\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)$

No. 7　問(2.14)

$b_n = n^2\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ とおくと、

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|(n+1)^2\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{n^2}\left(-\frac{3}{2}\right)^n\right| = \left|\left(-\frac{2}{3}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}$$

$0 \leq \frac{2}{3} < 1$ より、問(2.8)の結果から、$b_n \to 0 \ (n\to\infty)$

よって $a_n = 3^n\left(1+n^2\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)$ について

$$1+n^2\left(-\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \qquad 3^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \text{ より、} \qquad a_n \to +\infty \ (n\to\infty)$$

(4) $a_n = \dfrac{(-a)^n+b^n}{na^n+b^n} = \dfrac{\left(-\frac{a}{b}\right)^n+1}{n\left(\frac{a}{b}\right)^n+1} \quad (0<a<b)$

$\frac{b}{a} = r$ とすると、$0<a<b$ より $0<r<1$

よって $(-r)^n \to 0 \ (n\to\infty)$

$b_n = nr^n$ とすると、

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{(n+1)r^{n+1}}{nr^n}\right| = \left|r\left(1+\frac{1}{n}\right)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} r$$

$0<r<1$ より、問(2.8)から、$nr^n \to 0 \ (n\to\infty)$

よって $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{0+1}{0+1} = 1$ 　つまり、$a_n \to 1 \ (n\to\infty)$

(5) $a_n = \left(1+\frac{1}{2}(-1)^n\right)^n$

$n=2m, 2m-1$ とおくと、

$$a_{2m} = \left(1+\frac{1}{2}(-1)^{2m}\right)^{2m} = \left(1+\frac{1}{2}\right)^{2m} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2m} \xrightarrow[m\to\infty]{} +\infty$$

$$a_{2m-1} = \left(1+\frac{1}{2}(-1)^{2m-1}\right)^{2m-1} = \left(1-\frac{1}{2}\right)^{2m-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

発散するけど、$-\infty$, $+\infty$ に発散するわけではない。

(6) $a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$

$b_n = \frac{1}{n}$ とおくと、$a_n = \left(1+\frac{b_n}{n}\right)^n$

$b_n \to 0 \ (n\to\infty)$ より、問(2.13)の結果から、$a_n \to 1 \ (n\to\infty)$

(7) $a_n = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!}\cdot\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} = \frac{2n+2}{2n+3} = 1-\frac{1}{2n+3} \leq 1-\frac{1}{n}$$

問(2.11)の結果から $\{a_n\}$ は 0 に収束する。

NO.

DATE

No.7 問(3.1)〜問(3.3)

問(3.1)

(1) $\{b_n\}$、$\{a_n+b_n\}$は有界かつ広義単調増加より、

$b_n \to \beta\ (n\to\infty)$、$a_n+b_n \to \alpha+\beta\ (n\to\infty)$ に収束する。

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n-b_n) = \alpha+\beta-\beta = \alpha$、$a_n$は$\alpha$に収束する。

(厳密にやりたいなら、第2章でやった $\varepsilon-N$ 論法で)

(2) (2) ⇒ (1)を証明する。

$b_{n+1}-b_n \geqq |a_{n+1}-a_n| \geqq 0$

$b_{n+1} \geqq b_n$

∴ $\{b_n\}$は広義単調増加。また、$\{b_n\}$は条件より有界。

次に $\{a_n+b_n\}$が有界かつ広義単調増加であることを示す。

$|a_{n+1}-a_n| \leqq b_{n+1}-b_n$

$$\underbrace{-b_{n+1}+b_n \leqq a_{n+1}-a_n}_{①} \underbrace{\leqq b_{n+1}-b_n}_{②}$$

①より、$a_{n+1}+b_{n+1} \geqq a_n+b_n$

∴ $\{a_n+b_n\}$は広義単調増加

$a_1+b_1=M$とすると、$M=a_1+b_1 \leqq a_n+b_n\ (\forall n\in\mathbb{N})$より、$\{a_n+b_n\}$は下に有界。

②より、$a_{n+1}-b_{n+1} \leqq a_n-b_n$

$a_1-b_1=M'$とすると、$a_n-b_n \leqq a_1-b_1=M'$

b_nは有界だから $b_n \leqq k$ となる $\exists k\in\mathbb{R}$ が存在する。

よって $a_n+b_n=(a_n-b_n)+2b_n \leqq M'+2k\ (\forall n\in\mathbb{N})$

∴ $\{a_n+b_n\}$は上に有界

つまり $\{a_n+b_n\}$は有界。

これより、(1)に帰着できたため、$\{a_n\}$が収束することがいえる。

問(3.2)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad (n\in\mathbb{N} \text{ かつ } n\geqq N \text{ のとき})$$

$\forall n\in\mathbb{N}$に対して $a_n>0$、$b_n>0$ より、

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leqq \frac{a_n}{b_n}$$ ∴ $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$は $n\geqq N$ のとき広義単調減少。

また、$a_n>0$, $b_n>0\ (\forall n\in\mathbb{N})$より、

$\frac{a_n}{b_n}>0\ (\forall n\in\mathbb{N})$ が成り立つから $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$は下に有界。

よって下に有界な減少列は収束するから 0が下界であることを考えると、

$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$は負でない実数に収束する。

NO.

DATE

よって $\dfrac{a_n}{b_n} \to \alpha$ ($\alpha \geqq 0$, $n \to \infty$)

また、$\{b_n\}$は正の実数に収束するから、

$$b_n \longrightarrow \beta \quad (\beta > 0,\ n \to \infty)$$

よって $a_n = \dfrac{a_n}{b_n} \cdot b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha\beta$

$\alpha \geqq 0$, $\beta > 0$ より、$\alpha\beta \geqq 0$

∴ $\{a_n\}$は負でない実数に収束する。(厳密には $\varepsilon - N$ 論法)

問(3.3)(1) βは正の実数 $d_n = 1 - \dfrac{\beta}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) とおく。$n \in \mathbb{N}$ かつ $n \neq \beta$ のとき、

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{1-\frac{\beta}{n+1}}{1-\frac{\beta}{n}} = 1 + \frac{\frac{\beta}{n} - \frac{\beta}{n+1}}{1-\frac{\beta}{n}} = 1 + \frac{\beta}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{1-\frac{\beta}{n}} = 1 + \frac{\beta}{(n+1)(n-\beta)} = 1 + \frac{\beta_n}{n^2}$$

ただし、$\beta_n = \dfrac{\beta n^2}{(n+1)(n-\beta)} = \dfrac{\beta}{(1+\frac{1}{n})(1-\frac{\beta}{n})}$。よって $\beta_n \to \beta$ ($n \to \infty$)

それゆえ、$c < \beta$であるとき、$N' > \beta$であって、

$$c < \beta_n \quad (n \in \mathbb{N} \text{ かつ } n \geqq N' \text{ のとき})$$

が成り立つ自然数N'が取れる。このとき、

$$1 + \frac{c}{n^2} < 1 + \frac{\beta_n}{n^2} = \frac{d_{n+1}}{d_n} \quad (n \in \mathbb{N} \text{ かつ } n \geqq N' \text{ のとき})$$

が成り立つ。$b_n = \max\{d_n, d_{N'}\}$ ($n \in \mathbb{N}$) と定め、$N'' = \max\{N, N'\}$ と定めると、

$n \geqq N''$ かつ $n \in \mathbb{N}$ のとき、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq 1 + \frac{c}{n^2} < \frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

が成り立つ。以上のように、$c < \beta$である$\beta \in \mathbb{R}$を取り、数列$\{b_n\}$を定めると、$\{b_n\}$は問題(3.2)(1)の条件をみたす。よって、問題(3.2)(1)の結果を適用して、$\{a_n\}$は負でない実数に収束することが分かる。

(2) βは正の実数 $d_n = 1 + \dfrac{\beta}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) とおく。$n \in \mathbb{N}$ のとき、

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{1+\frac{\beta}{n+1}}{1+\frac{\beta}{n}} = 1 + \frac{\frac{\beta}{n+1} - \frac{\beta}{n}}{1+\frac{\beta}{n}} = 1 - \frac{\beta}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{1+\frac{\beta}{n}} = 1 - \frac{\beta}{(n+1)(n+\beta)} = 1 - \frac{\beta_n}{n^2}$$

ただし、$\beta_n = \dfrac{\beta n^2}{(n+1)(n+\beta)} = \dfrac{\beta}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{\beta}{n})}$。よって $\beta_n \to \beta$ ($n \to \infty$)

それゆえ $c < \beta$であるとき、$N' > \beta$であって

$$c < \beta_n \quad (n \in \mathbb{N} \text{ かつ } n \geqq N' \text{ のとき})$$

が成り立つ自然数N'が取れる。このとき、

$$1 - \frac{c}{n^2} > 1 - \frac{\beta_n}{n^2} = \frac{d_{n+1}}{d_n} \quad (n \in \mathbb{N} \text{ かつ } n \geqq N' \text{ のとき})$$

NO.

DATE

No. 8　問(3.3)〜問(3.5)

が成り立つ。$b_n = \max\{d_n, d_N\}$ $(n \in \mathbb{N})$ と定め, $N'' = \max\{N, N'\}$ と定めると,
$n \geqq N''$ かつ $n \in \mathbb{N}$ のとき,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqq 1 - \frac{c}{n^2} > \frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

が成り立つ。以上のように, $c < \beta$ である $\beta \in \mathbb{R}$ を取り数列 $\{b_n\}$ を定めると, $\{b_n\}$ は問題 (3.2)(1) の条件をみたす。よって, 問題 (3.2)(1) の結果を適用して, $\{a_n\}$ は負でない実数に収束することが分かる。

問 (3.4)

(1) (イ) ($\Rightarrow$) (解1) A_1 は下に有界

$\Longrightarrow \{a_k ; k \in \mathbb{N}, k \geqq 1\}$ は下に有界

$\Longrightarrow \{a_k ; k \in \mathbb{N}, k \geqq m, m \in \mathbb{N}\}$ は下に有界

$\Longrightarrow A_m$ は下に有界

(解2) $A_1 \supset A_m$ が明らかより, 問 (1.3) の結果から,

A_1 が下に有界 $\Longrightarrow$ $\underline{A_m \text{も下に有界}}$ で $\inf A_1 \leqq \inf A_m$

($\Leftarrow$) A_m が下に有界より,

$a_k \geqq \inf A_m$ $(k \geqq m)$

よって $\forall k \in \mathbb{N}$ について

$a_k \geqq \min\{a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}, \inf A_m\}$

よって A_1 は下に有界。

(ロ) (イ) と同様

(2) (ハ) $A_n \supset A_{n+1}$ が $\forall n \in \mathbb{N}$ について成り立つ。

$\{a_n\}$ が下に有界より, A_n, A_{n+1} は下に有界。

よって 問 (1.3) の結果から,

$\inf A_n \leqq \inf A_{n+1}$ が $\forall n \in \mathbb{N}$ について成り立つ。

$\Longleftrightarrow$ $\underline{a_n} \leqq \underline{a_{n+1}}$ が $\forall n \in \mathbb{N}$ について成り立つ。

つまり, $\underline{a_n}$ は広義単調増加。

(ニ) (ハ) と同様

(3) (ホ) ($\Rightarrow$) 対偶を考える。つまり,

数列 $\{a_n\}$ が下に有界でない $\Longrightarrow$ $\underline{a} = -\infty$

これは問題文より, $\underline{a}$ の定義であるから, 当然成り立つ。

($\Leftarrow$) $\exists M \in \mathbb{R}$ s.t. $a_n \geqq M$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

これは $\underline{a_n} \geqq M$ であることを示している。

よって $\underline{a_n} \not\to -\infty$ $(n \to \infty)$

つまり $\underline{a} \neq -\infty$