

予定

- ・ 1変数関数の定積分
- ・ 中級数とテイラー展開
- ・ 広義積分
- ・ 重積分
- (微分方程式?)

§5 1変数関数の積分

5.1 定積分

目標: 「閉区間上の連続関数は積分可能」

● 復習

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が $c \in [a, b]$ で連続

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

f が $[a, b]$ で連続 \Leftrightarrow 任意の $c \in [a, b]$ で連続

連続関数の基本的な性質

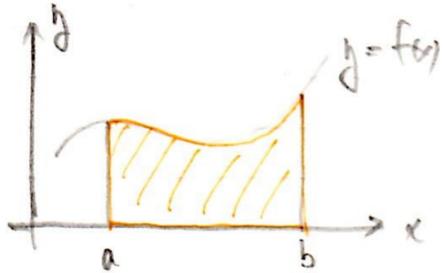
- (1) $a < c < b$ $\varepsilon > 0$ $f(c) > 0$ ならば、 c の十分近くでは $f(x) > 0$
- (2) $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ ならば、 $f(x) = 0$ ε がある $a < c < b$ が存在する (中間値の定理)
- (3) $f(x)$ は $[a, b]$ で最大値、最小値を持つ。 //

$\rightarrow f$: 連続 $\Leftrightarrow y = f(x)$ の逆写像が存在する。

定理 5.1.1

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 連続, $f(x) \geq 0$ ($x \in [a, b]$)

とす。この時、 $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ で囲まれた部分の面積は確定する。



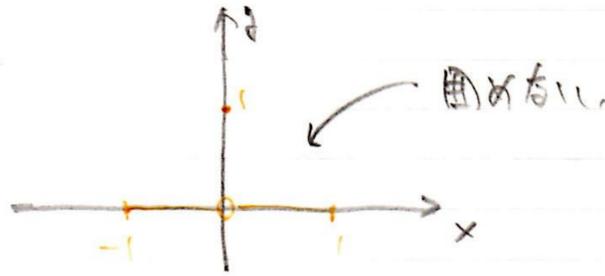
直感的には納得しやすい。

(この定理は証明せずに先にすたす。)

例 5.1.2

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x=0) \\ 0 & (x \neq 0) \end{cases}$$

$$X = [-1, 1]$$

例 5.1.3

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ は有理数}) \\ 0 & (x \text{ は無理数}) \end{cases}$$

$$X = [-1, 1]$$

← 何ら、たすだけ有り (囲む有り)

① 連続関数有らば、たすも有り。

(② 何ら、たす有らば、たす有り)

③ この定理は f が連続でない時は同も有り。

定義

$f(x)$ は $[a, b]$ で連続かつ $f(x) \geq 0$ とする。この時矢の面積 S を

$f(x)$ の a から b までの連続分をいい、 $S = \int_a^b f(x) dx$ とおく。

$f(x) \leq 0$ とする時は、 $\int_a^b f(x) dx = - \int_a^b (-f(x)) dx$ と定める。

$[a, b]$ 内で正にもたたり、負にもたたりする場合は、分けて考える。



$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d (-f(x)) dx + \int_d^b f(x) dx$$

$b < a$ の時は、 $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ //

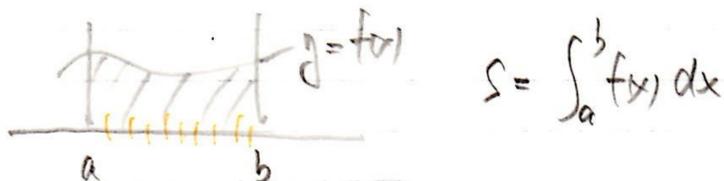
補題 5.1.4

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

① 各項は面積 //

② "面積" の正確な定義 (区分求積法)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 連続

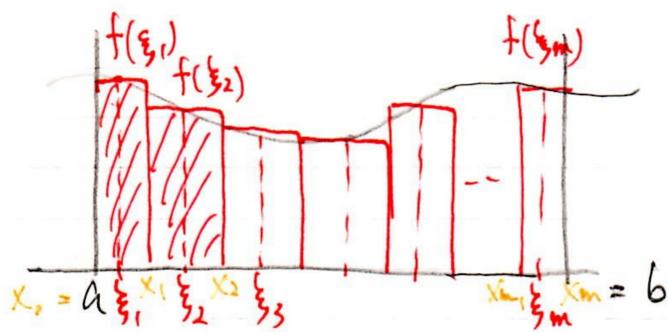


$[a, b]$ を細い区間に分割する。 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$

(これを $[a, b]$ の分割という。)

$j = 1, \dots, m$ に対し、 $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ とする

$\sum_{j=1}^m f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$ を R -マシ和 という。



赤の長方形の面積がリーマン和

アイテータ

小区間毎の幅をどんどん小さくしていけば、リーマン和は"面積"に近づくであろう。

正確な仕方

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$: 連続

小区間 $[x_{j-1}, x_j]$ 毎の幅の最大値を δ とする。

・このように分割を選んで

・各小区間の中からこのように ξ_j を選ぶ

$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = S$ とする S が存在する。

この S を $f(x)$ の a から b までの定積分といい、 $\int_a^b f(x) dx$ とかく。

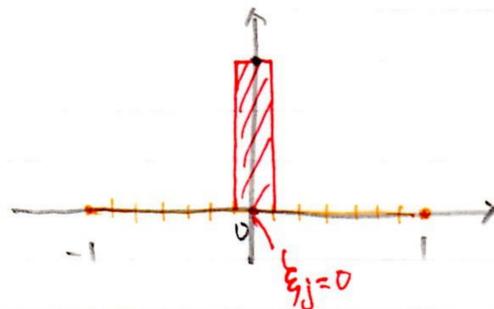
(注)

(1) 「 f が $[a, b]$ 上で連続」 がある定数の ϵ に対し、上のリーマン和の極限が存在する δ が証明できる。 (定数の連続性を用いる)
 ← 定理!

(2) f が連続でなくとも、リーマン和の極限が存在する δ があれば、この時 f は (リーマン) 積分可能という。

例 5.1.2 (つみき)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x=0) \\ 0 & (x \neq 0, -1 \leq x \leq 1) \end{cases}$$



$$\text{リーマン和} \leq \delta \cdot 1$$

$$\therefore 0 \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \text{リーマン和} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta = 0$$

$$\therefore \lim_{\delta \rightarrow 0} \text{リーマン和} = 0$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0. \quad (\text{リーマン積分可能})$$

例 5.1.3 (フグキ)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ は有理数}) \\ 0 & (x \text{ は無理数}) \end{cases}$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

これはリーマン積分できない

② 実は「ルベーグ積分」というのがあって、
このときでは

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0 \rightarrow \text{積分にはいろいろある。}$$

5.2 微積分の基本定理

定理 5.2.1 (積分の平均値の定理)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 連続 $\Rightarrow a \leq c \leq b$ が存在して、

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c) \quad //$$

証) 連続関数の中間値の性質の (3) より

$m \leq f(x) \leq M$ なる m, M が存在する。

m : 最小値
 M : 最大値

$$\therefore m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$\therefore m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

中間値の定理より、 $a \leq c \leq b$ が存在して

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

□

命題 5.2.2.

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 連続

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

この時、 $G(x)$ は微分可能で、 $G'(x) = f(x)$ //

証) $x+h \in [a, b]$

$$G(x+h) - G(x) = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt$$

定理 5.2.1 より, x と $x+h$ の間に c があり,

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dx = f(c)$$

$$\therefore \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(c)$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x) \quad \square$$

// $G'(x)$

f は連続

定義 $F(x) = f(x)$ とある $F(x)$ を, $f(x)$ の原始関数 (又は不定積分) という。

命題 5.2.2 $\Rightarrow G(x) = \int_a^x f(x) dx$ は f の原始関数 (の 1 つ)

$F(x) = G(x) + c$ (c は定数) とおける。

定理 5.2.3 (微積分の基本定理)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 連続

$$a \leq \alpha \leq \beta \leq b$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = G(\beta) - G(\alpha) \\ (= F(\beta) - F(\alpha))$$

$$\textcircled{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_a^{\beta} f(x) dx - \int_a^{\alpha} f(x) dx = G(\beta) - G(\alpha) //$$

● (定積分を計算するための基本公式)

定理 5.2.4 (部分積分) $f(x), g(x) : C^1$ -級

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) \int f(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx \\ (2) \int_a^b f(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx \end{cases}$$

② $(-f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$ の両辺を積分 //定理 5.2.5 (置換積分、変数変換) $f(x) : \text{連続}, \varphi(t) : C^1$ -級

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) \int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \\ (2) \int_a^b f(x) dx = \int_c^p f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad \begin{pmatrix} a = \varphi(c) \\ b = \varphi(p) \end{pmatrix} \end{cases}$$

② $F(x) = \int f(x) dx$

$G(t) = F(\varphi(t))$ とおく。

~~$G(t) = F(\varphi(t)) \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t)$~~

$\therefore G(t) = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$

$x = \varphi(t)$ とおく。

$G(t) = F(x) = \int f(x) dx$ □

• 微積分の基本定理

• 部分積分

• 置換積分

この3つをくみ合わせ、
 種々の積分の公式がみちみちる。

5.3 曲線の長さ

曲線のパラメータ表示

$t \in [a, b]$ とし、 \mathbb{R}^2 内の曲線 C 上の点 (x, y) が、

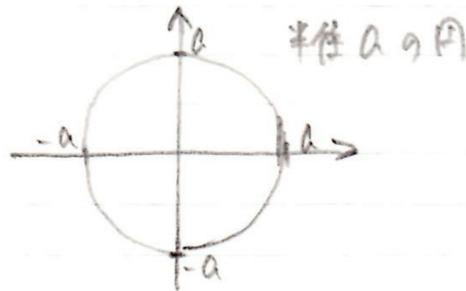
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

により与えられる時、曲線 C はパラメータ表示されているという。

特に $\varphi'(t), \psi'(t) \neq 0$ の時、 C は C' -級曲線という。

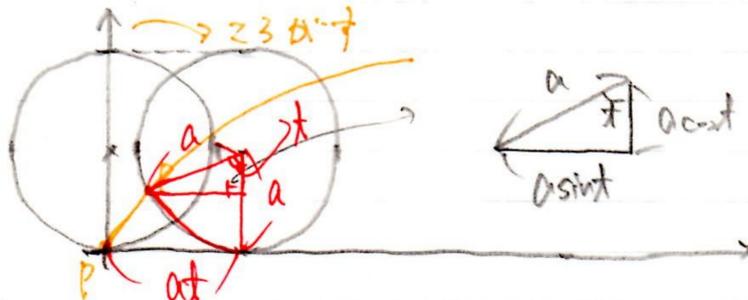
例 5.3.1

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases} \quad (a > 0) \\ 0 \leq t \leq 2\pi$$



例 5.3.2

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (a > 0) \\ 0 \leq t \leq 2\pi$$



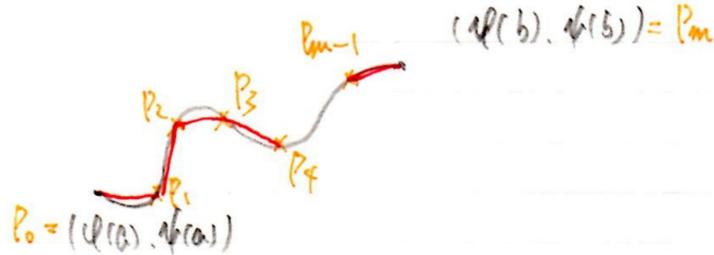
$$\begin{cases} P \text{ の } x \text{ 座標} : at - a \sin t = a(t - \sin t) \\ \text{ " } y \text{ " } : a - a \cos t = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

⇒ サイクロイド

半径 a の円が x 軸上をころがる時、円上の 1 点の軌跡 C である。

曲線の長さ

$$C \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad C' \text{-級} \\ a \leq t \leq b$$



$$a = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_m = b \quad \text{に分割}$$

$$P_i = (\varphi(t_i), \psi(t_i)) \quad (i = 0, 1, \dots, m)$$

$$\begin{aligned} \text{折小解の長さの和} &= \sum_{i=1}^m \overline{P_{i-1} P_i} \\ &= \sum_{i=1}^m \sqrt{(\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}))^2 + (\phi(t_i) - \phi(t_{i-1}))^2} \quad \dots (*) \end{aligned}$$

$\square \Delta \Gamma \square$

分割を細くして無限 $\rightarrow C$ の P_0 から P_n までの長さ

$$\text{分割の中の最大値を } \delta \text{ とする, 曲線の長さ } l(C) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^m \overline{P_{i-1} P_i} \right)$$

↑
求めたいもの

平均値の定理より、各 i に対し、

$$t_{i-1} \leq \lambda_i \leq t_i, \quad t_{i-1} \leq \mu_i \leq t_i \quad \text{が存在する}$$

$$\begin{cases} \psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) = \psi'(\lambda_i)(t_i - t_{i-1}) \\ \phi(t_i) - \phi(t_{i-1}) = \phi'(\mu_i)(t_i - t_{i-1}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{i=1}^m \overline{P_{i-1} P_i} &= \sum_{i=1}^m \sqrt{\psi'(\lambda_i)^2 + \phi'(\mu_i)^2} (t_i - t_{i-1}) \\ &\quad \downarrow \begin{array}{l} \text{1-2は和の形} \\ \delta \rightarrow 0 \end{array} \\ &= \int_a^b \sqrt{\psi'(x)^2 + \phi'(x)^2} dx \end{aligned}$$

まとめ
命題 5.3.3

$$C \begin{cases} x = \psi(t) \\ y = \phi(t) \end{cases} \quad C^1\text{-級} \quad (0 \leq t \leq b)$$

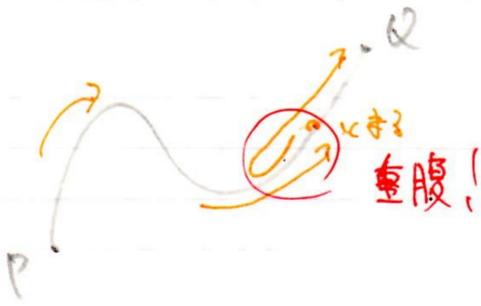
$$P = (\psi(a), \phi(a)), \quad Q = (\psi(b), \phi(b)) \quad \text{とする}$$

C の P から Q までの長さ

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{\psi'(t)^2 + \phi'(t)^2} dt$$

(注) (1) C^1 級 $\Rightarrow \sqrt{v'(t)^2 + w'(t)^2}$ 連続
 \Rightarrow 積分できる!

(2) = 水だけだと、長さも重複の部分が (7) (もうこれだけある。



重複を許さないようにするには、

$$v'(t)^2 + w'(t)^2 \neq 0 \quad (a \leq t \leq b)$$

とすればいい。

$$\textcircled{2} v'(t)^2 + w'(t)^2 = 0 \Leftrightarrow (v'(t), w'(t)) = (0, 0)$$

$v'(t)$: x の x 軸方向の速度

$w'(t)$: " y " "

$$(v'(t), w'(t)) = (0, 0) \Leftrightarrow x \text{ の途中で止まる}$$

つまり、

$$v'(t)^2 + w'(t)^2 \neq 0 \Rightarrow \text{点 } x \text{ は } P \text{ から } Q \text{ に向かい、} \\ \text{一定方向に動く。} //$$

例 5.3.4

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

$$l(C) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\underbrace{(a \cos t)^2 + (a \sin t)^2}_{a^2}} dt = a \int_0^{2\pi} dt = 2\pi a //$$

例 5.3.5

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad a > 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned} l(C) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a(1 - \cos t))^2 + (a \sin t)^2} dt \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s = \frac{t}{2} \quad t \neq \pi \quad 2 - 2\cos t &= 2 - 2\cos(2s) = \frac{2}{\cancel{\pi}} - 2(\cos^2 s - \sin^2 s) \\ &= 2(\cos^2 s + \sin^2 s) \\ &= 4 \sin^2 s \end{aligned}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi \rightarrow 0 \leq s \leq \pi \quad \therefore \sin s \geq 0$$

$$\therefore \sqrt{2 - 2\cos t} = 2 \sin s$$

$$\begin{aligned} l(C) &= a \int_0^{\pi} 2 \sin s \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right) ds \\ &= 4a [-\cos s]_0^{\pi} = 8a \end{aligned}$$

系 5.3.6

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}: C^1$ -級

$y = f(x)$ の $(a, f(a))$ から $(b, f(b))$ までの長さ $l(C) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$

例 5.3.7

$$f(x) = x^2$$

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{1 + (2x)^2} dx = 2 \int_a^b \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} dx =$$

$$\boxed{70121} \text{ p.8 } 13410 \quad \uparrow \quad = b\sqrt{4b^2+1} - a\sqrt{4a^2+1} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{b^2+\frac{1}{4}} + b}{\sqrt{a^2+\frac{1}{4}} + a} \right)$$

(放物線の長さ)

① 極座標表示

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = r(\theta) \cos \theta \\ y = r \sin \theta = r(\theta) \sin \theta \end{cases}$$

ただし、 $r = r(\theta)$ とおいた時
 $\rightarrow \theta \in \mathbb{R}$ かつ x, y とする曲線

系 5.3.8

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2} d\theta$$

② $\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$ ← 本来の $\sqrt{\quad}$ の中身

$$= (r'(\theta) \cos \theta - r(\theta) \sin \theta)^2 + (r'(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta)^2$$

$$= r'(\theta)^2 + r(\theta)^2 \quad //$$

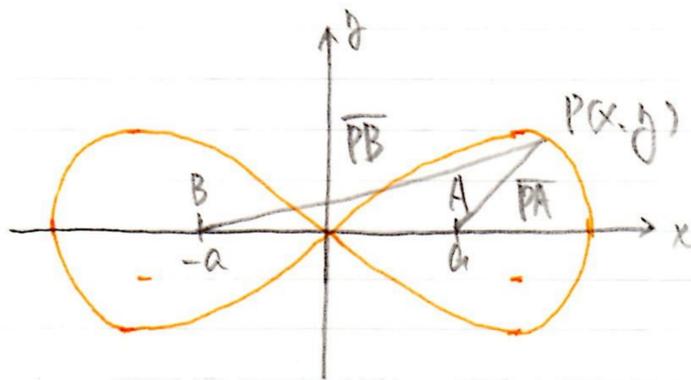
例 5.3.9

$$a > 0$$

$$A = (a, 0) \quad B = (-a, 0)$$

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = a^2 \text{ (一定) とする}$$

点 $P = (x, y)$ の軌跡. ($0 \leq t < 2\pi$)



$$\overline{PA}^2 = (x-a)^2 + y^2 \quad \overline{PB}^2 = (x+a)^2 + y^2$$

$$\rightarrow ((x-a)^2 + y^2)((x+a)^2 + y^2) = a^4$$

$$\rightarrow (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2) \quad \text{--- ①}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{① に代入}$$

$$r^4 = 2a^2 r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$\therefore r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{とすれば,}$$

$$r = a\sqrt{2\cos 2\theta}$$

$L_4 = 2\pi$ -トの極座標表示

$$\boxed{L_4 = \int_a^b \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2} d\theta}$$

$$r(\theta)^2 = 2a^2 \cos 2\theta$$

$$\frac{dr^2}{d\theta} = -4a^2 \sin 2\theta$$

$$2r \frac{dr}{d\theta}$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 &= \left(\frac{-4a^2 \sin 2\theta}{2r}\right)^2 = \frac{4a^4 \sin^2 2\theta}{r^2} = \frac{4a^4}{r^2} (1 - \cos^2 2\theta) \\ &= 4 \frac{a^4}{r^2} - r^2 \end{aligned}$$

$$\therefore r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = 4 \frac{a^4}{r^2} = \frac{4a^4}{2a^2 \cos 2\theta} = \frac{2a^2}{\cos 2\theta}$$

$$\begin{aligned} \therefore L_4 &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2} d\theta \\ &= \sqrt{2} a \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} \end{aligned}$$

= 代数的関数 (初等関数)
では表せない。

($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$)

$$t = \tan \theta \quad \text{とすれば,} \quad (\Leftrightarrow \theta = \text{Arctan } t)$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 2 \left(\frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \right) - 1 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1 + t^2}$$

$$L_4 = \sqrt{2} a \int_0^{\tan \pi/4} \sqrt{\frac{1+t^2}{1-t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$= \sqrt{2} a \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

← 楕円積分と呼ばれる (19世紀に Gauss が考察)
その一種

(参考) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = A \arcsin x \xrightarrow{\text{逆関数}} \sin x$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \xrightarrow{\text{逆関数}} \sin(x)$ 橋田関数

§ 6 べき級数

$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n$ ← 剰余項

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ 自然に表れた

より一般的に、 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 数列に対し、 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$

べき級数
整数級数

の形の関数を組織的に扱うことが目的。

6.1 級数

定義

$\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ 数列に対し、 $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ (0 ~ n までの和)

ととき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が収束する時、

その極地 α を、 $\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ととき、

無限級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ が収束するという。

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が存在しない時、 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ は発散するという。

例 6.1.1

$$a_k = \alpha r^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$|r| < 1$ の時収束

$$\textcircled{1} S_n = \sum_{k=0}^n \alpha \cdot r^k = \alpha \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\alpha}{1-r} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1-r^{n+1}) = \frac{\alpha}{1-r}$$

\uparrow
 $|r| < 1$

□

補題 6.1.2

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ が収束するならば, } \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$$

$$\textcircled{1} S_n - S_{n-1} = a_n \quad \text{より} \quad \text{明} \text{ } \square$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ は収束しない} \quad (*)$$

例 6.1.3

$$a_k = \alpha r^k, \quad |r| \geq 1, \quad \alpha \neq 0 \quad \text{の時, } \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ は発散}$$

$$\textcircled{1} |r| \geq 1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha \cdot r^k \neq 0$$

② (*) の逆は成立しない。

$$\left(\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0 \not\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ は収束} \right)$$

例 6.1.4

$$a_k = \frac{1}{k+1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0 \quad \text{しかし} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \text{ は収束しない}$$