数IA 確認と予想

理 1-10 関口

平成 22 年 8 月 24 日

独断によりノートから重要と思われる定義、定理を抽出したものと、参考問題を補完する予想問題をまとめてみました。(少ない!すいません…)ネットを調べましたが、首都大も含め過去問はありませんでした。また、他の先生のテストも調べましたが、先生によって範囲が多種多様であまり参考になりませんでした。(余談ですが、下村先生のカリキュラムは首都大のそれに沿ったものとなっており、首都大の過去問があればそっちの方が参考になるかも。無いと思うけど…)石川の言ってたようにポイントは ε $-N($δ$)$ 論法等の極限、関数の連続と微分、偏微分そして有名定理の証明になるかと。もちろん先生の参考問題が一番有力な例題です。つか、そっちをやりましょう!みなさんのささやかな参考にでもなれば幸せです。長文&言い訳失礼しました。

1 ノートからの確認

1. 数列が無限大に発散することの定義
2. 収束する数列は有界であることを示せ
3. 区間 I で一変数関数 f が連続である定義
4. 一変数関数の中間値の定理を証明せよ
5. $sin^{-1}x$ を微分せよ
6. 一変数関数の平均値の定理を証明せよ
7. ロピタルの定理を証明せよ
8. $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ となるための条件
9. 二変数関数の全微分の定義と接平面の表し方を示せ
10. 極値の判定方法の一つを示せ

2 予想問題

1. $\lim_{x \to a} x^3 = a^3$ を示せ

2. $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha, \lim_{x \to a} g(x) = \beta$ とする。$\alpha \neq 0$ の時、$\lim_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{\beta}{\alpha}$ を示せ

3. $y = (x^2 + 1)logx$ の n 次導関数を求めよ ($n \geq 3$)

4. C^1 級関数 $z = f(x, y)$ について,$x = uv, y = u^2 + v^2$ とする。このとき、$\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ を u, v, f_x, f_y を用いて表せ。

5. $z = tan^{-1}(\frac{y}{x})$ とする。z_x, z_y を求め、$z_{xx} + z_{yy}$ を求めよ

6. $f(x, y) = x^2ye^{2x}$ の、(1,1) における接平面を求めよ

3　確認の参照

確認の方は、上から順にノートの、定理 1.3 の次の定義、定理 1.4、定理 1.15 の次の定義、定理 1.18、定理 2.5、定理 2.8、定理 2.12、定理 3.10、全微分の項、定理 3.17 を参照してください。

4　予想問題の解答

1. $^\forall\epsilon > 0$ に対して、$\delta = min\{1, \frac{\epsilon}{3a^2+3|a|+1}\}$ とする。$|x-a| < \delta$ のとき、

$$\begin{aligned} |x^3 - a^3| &= |x-a||x^2+ax+a^2| \\ &= |x-a||(x-a)^2+3a(x-a)+3a^2| \\ &\leq |x-a|\{(x-a)^2+3a|x-a|+3a^2\} \\ &< |x-a|(3a^2+3|a|+1) \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

   よって $\lim_{x\to a} x^3 = a^3$ が示された。

2. なんとかなる。

3. ライプニッツの公式（定理 2.6）を用いる。$f(x) = logx$ の n 階導関数は $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}(n \geq 1)$ より、

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= (x^2+1)f^{(n)}(x) + n(2x)f^{(n-1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2}2f^{(n-2)}(x) \\ &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!(x^2+1)}{x^n} \end{aligned}$$

4.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f_x(uv, u^2+v^2)v + f_y(uv, u^2+v^2)2u$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = f_x(uv, u^2+v^2)u + f_y(uv, u^2+v^2)2v$$

5. $\frac{y}{x} = tanz$

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{1-cos^2z}{cos^2z} \text{より}, \frac{1}{cos^2z} = 1 + \frac{y^2}{x^2}$$
$$\text{また、偏微分して、}\frac{1}{cos^2z}z_x = -\frac{y}{x^2}, \frac{1}{cos^2z}z_y = \frac{1}{x}$$
$$\text{これらより、}z_x = -\frac{y}{x^2+y^2}, z_y = \frac{x}{x^2+y^2}$$
$$\text{さらに、}z_{xx} + z_{yy} = 0$$

6.

$$z = 4e^2x + e^2y - 4e^2$$