◎ 不変部分空間.

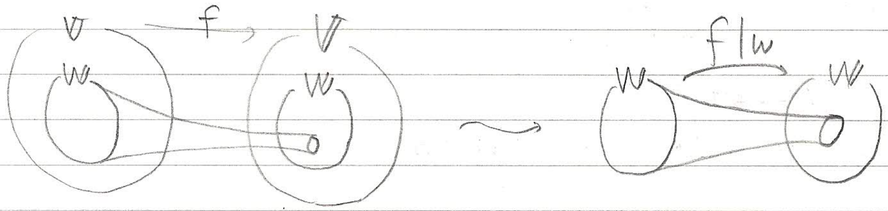
$f: V \to V$: "ℓ"変換.

部分空間 W が f-不変 $\overset{def}{\iff}$ 「$v \in W \Rightarrow f(v) \in W$」

◎ 線型変換 f の W への制限.

$W \subset V$: f-不変 のとき.

f の W への制限 $\quad f|_W : W \to W$



$\boxed{\text{定理22}}$ W_1, W_2 ともに f-不変

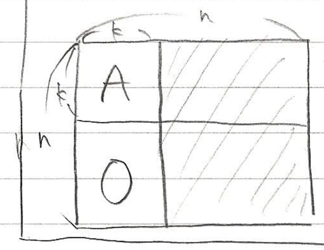
$\Rightarrow W_1 \cap W_2$, $W_1 \cap W_2$ ともに f-不変

$\boxed{\text{定理23}}$ $f: V \to V$ $\quad W$: f-不変.

$E = \{e_1 \cdots e_k\}$ … W の基底

$\tilde{E} = \{e_1 \cdots e_k\ e_{k+1} \cdots e_n\}$ V の基底 とすると.

f の $\tilde{E}$ に関する表現行列は. ブロック上三角行列。



A は $f|_W : W \to W$ の E に関する表現行列

$\boxed{\text{定理24}}$ $f: V \to V$ に対し.

$\{0\} \subset W_1 \subset \cdots W_n = V$

$\dim W_i = i$ となる f-不変部分空間の列が存在する.

定理25 $f: V \to V$ "線形"変換.

$\Phi_f(x) = \prod_{i=1} (x-\alpha_i)^{m_i}$　$\alpha_i \in \mathbb{C}$. 相異なる.

$\Rightarrow 1 \leq \dim V(\alpha_i) \leq m_i$　$(\forall i)$

重複度

定理26 f が対角化可能

$\Longleftrightarrow$ $\forall i$ に対し. $\dim V(\alpha_i) = m_i$

◎ **ユニタリ変換** (直交変換)

$\forall x, y \in V$ に対し. $(x, y) = (f(x), f(y))$ をみたすもの

◎ **エルミート変換** (対称変換)

$\forall x, y \in V$ に対し. $(x, f(y)) = (f(x), y)$ をみたすもの.

定理27 f が ユニタリー or エルミート

$\Rightarrow$ f は対角化可能 かつ 正規直交基底

定理28 ユニタリー変換の表現行列 A は

$A^* = A^{-1}$ をみたす。 …ユニタリ行列 (A^* 随伴行列)

定理29 エルミート変換 の表現行列 B は

$B^* = B$ をみたす …エルミート行列

定理30 ユニタリ変換 f と表現行列 A (ユニタリ行列) に対し.

① f (Aでも) の固有値はすべて実数.

② 異なる固有値 の 固有ベクトル は直交する。

定理31 エルミート変換 f と エルミート行列 B に対し.

① f (Bでも) の固有値 は 絶対値1 の複素数.

② 異なる固有値の 固有ベクトル は直交する。

定理32 $f: V \to V$ エルミート変換.
W: f-不変.
$\Rightarrow W^{\perp}$ も f-不変

定理33 上定理と $V = W \oplus W^{\perp}$ より. 正規直交基底に対し.
fの表現行列は ブロック対角行列. となる.

$$\begin{pmatrix} f|_W & 0 \\ 0 & f|_{W^{\perp}} \end{pmatrix}$$

定理34 エルミート変換は対角化可能.
また、正規直交基底を固有ベクトルのみでつくれる。

定理35 エルミート行列 $B=B^*$ は ユニタリ行列で対角化できる

◎ 対角化の手順

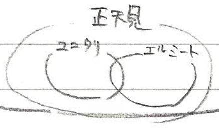
① 固有値と重複度を求める ← $|xI-A|=0$ を解く。

② 各固有空間の基底を定める （対角化可能 $\Leftrightarrow$ $\dim V(\lambda_i) = m_i$）

③ ②の基底を並べ. 行列 P をつくる。

④ $P^{-1}AP$ を計算すると. あら不思議 対角成分に固有値が並ぶはずです。

◎ 正規行列 $AA^* = A^*A$



定理36 Toplitzの定理
Aは正規行列 $\Leftrightarrow$ Aはユニタリ行列で対角化可能

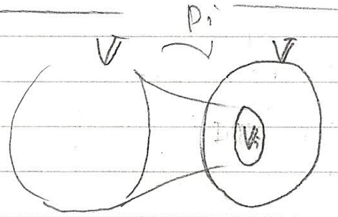
① スペクトル分解　　f: 対角化可能.

$v = \sum_{i=1}^{n} v_i \in V$　(v_i は f の固有ベクトル) とする。と

$P_i(v) = v_i$ という写像が定まる.

P_i … 第 i 成分への射影 という.

定理37　$V_i = \mathrm{Im}\, P_i$



定理38　① $P_i \circ P_j = \delta_{ij} P_i$

② $\sum_{i=1}^{n} P_i = \hat{1}$　恒等変換　— 全方向への射影を足すと元に戻る

定理39　λ_i … 固有値

$f = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n$　: f のスペクトル分解.