No. 1

Date . .

09 − [I]

$$\Phi_A(x) = \det(xI - A) = \begin{vmatrix} x+2 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & x & 1 & 2 \\ -2 & 0 & x-3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & x+3 \end{vmatrix} = (x+2)\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & x-3 & -2 \\ -1 & 1 & x+3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -3 & 0 & -1 \\ x & 1 & 2 \\ -1 & 1 & x+3 \end{vmatrix}$$

$= x(x-2)(x+1)(x+3)$. より. 固有値は. $0, 2, -1, -3$.

次に

固有ベクトルを求める. (i) 0 に対し, $A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0$ として $\begin{cases} -2a+3b+d=0 \\ -c-2d=0 \\ 2a+3c+2d=0. \\ b-c-3d=0 \end{cases}$

これより $\begin{cases} a=2d \\ b=d \\ c=-2d \end{cases}$ より 固有ベクトルの1つは $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ii) $A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ として $\begin{cases} -2a+3b+d=2a \\ -c-2d=2b. \\ 2a+3c+2d=2c \\ b-c-3d=2d \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a=d \\ b=d \\ c=-4d \end{cases}$ なので $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) $A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ として $\begin{cases} a=\frac{11}{2}b \\ c=-4b \\ d=\frac{5}{2}b \end{cases}$ より $\begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$

(iv) $A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ として $\begin{cases} a=-4d. \\ b=d. \\ c=d \end{cases}$ より $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ とすると

$AP = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ であるから $P^{-1}AP$ は対角行列。

09-② (1) $c_1(-1+x^2)+c_2(-1-x+x^2)+c_3(4-3x^2)=0$ とすると.

$(c_1+c_2-3c_3)x^2-c_2x+(-c_1-c_2+4c_3)=0$ より.

$c_1=c_2=c_3=0$ であるから

Fの3つのベクトルは一次独立.

またこれらは$\mathbb{V}$の元で. $\dim\mathbb{V}=3$ であるから F は $\mathbb{V}$の基底 となっている。

(2) $f(x)=1$ のとき $Tf(x)=x(x+2)\cdot 1+f(-x)=x^2+2x+1$.

$f(x)=x$ のとき $Tf(x)=(x-1)+x(x+2)\cdot 1+(-x)=x^2+2x-1$

$f(x)=x^2$ のとき. $Tf(x)=2(x-1)+(x-1)\cdot 2x+x(x+2)\cdot 1+x^2=4x^2+2x-2$

$$\left(x^2+2x+1,\ x^2+2x-1,\ 4x^2+2x-2\right)=\left(1\ \ x\ \ x^2\right)\begin{pmatrix}1&-1&-2\\2&2&2\\1&1&4\end{pmatrix}$$

より $A=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\2&2&2\\1&1&4\end{pmatrix}$.

(3) $f(x)=-1+x^2$ のとき $Tf(x)=(x-1)\cdot 2+(x-1)\cdot 2x+x(x+2)\cdot 0+(-1+x^2)=3x^2+2x-3$

$f(x)=-1-x+x^2$ のとき $Tf(x)=(x-1)\cdot 2+(x-1)(2x-1)+x(x+2)(-1)+(-1+x+x^2)=2x^2-2x-2$

$f(x)=4-3x^2$ のとき $Tf(x)=(x-1)\cdot(-6)+(x-1)\cdot(-6x)+x(x+2)\cdot 1+(4-3x^2)=-8x^2+2x+10$

$$\left(3x^2+2x-3\ \ 2x^2-2x-2\ \ -8x^2+2x+10\right)=\left(-1+x^2\ \ -1-x+x^2\ \ 4-3x^2\right)\begin{pmatrix}5&0&0\\-2&2&-2\\0&0&2\end{pmatrix}$$

より $B=\begin{pmatrix}5&0&0\\-2&2&-2\\0&0&2\end{pmatrix}$

(4) $\Phi_T(x)=\Phi_B(x)=\begin{vmatrix}x-5&0&0\\2&x-2&2\\0&0&x-2\end{vmatrix}=(x-5)(x-2)^2$

この固有値2について. 重複度は2,

$B\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ とすると $\begin{cases}5a=2a\\-2a+2b-2c=2b\\2c=2c\end{cases}$ より $\begin{cases}a=0\\c=0\end{cases}$

$\mathbb{V}(2)=\mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ より $\dim\mathbb{V}(2)=1\ \neq 2$ より Bは対角化不可能.

すなわち. Tは対角化不可能である。

09-$\boxed{3}$

(1) $\forall f \in V$ に対し.

$g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ で定める。

$\begin{cases} g(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x) \\ h(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -h(x) \end{cases}$ より $\begin{cases} g \in V_+ \\ h \in V_- \end{cases}$

また $g(x)+h(x) = f(x)$ であるから, $V = V_+ + V_-$

さらに. $A \in V_+ \cap V_-$ とすると $A(-x) = A(x)$ かつ $A(-x) = -A(x)$

すなわち $A(x)=0$ より $V_+ \cap V_- = \{0\}$. 直和判定法より $V = V_+ \oplus V_-$

(2). $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}}_{\in V_+} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}}_{\in V_-}$

$\sin(x+\alpha) = \underbrace{\cos\alpha \sin x}_{\in V_-} + \underbrace{\sin\alpha \cos x}_{\in V_+}$

09-④ (1) $\sum_{i=1}^{3} c_i a_i = 0$ とすると $\begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 - 2c_2 + c_3 = 0 \\ -c_2 + c_3 = 0 \\ -c_2 + 2c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ より

$(c_i \in \mathbb{R})$

a_1, a_2, a_3 は一次独立。

$\sum_{i=4}^{6} c_i a_i = 0$ とすると 同様に $c_4 = c_5 = c_6 = 0$ より a_4, a_5, a_6 は一次独立。

これより $\dim W_1 = \dim W_2 = 3$

一方 $\sum_{i=1}^{6} k_i a_i = 0$ とすると $(k_i \in \mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_6 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_6 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} k_1 = k_2 = k_4 \\ k_3 = k_5 = k_6 = 0 \end{array}$$

よって a_1, a_2, a_4 の組は一次独立ではない。

よって a_1を除いた $a_2 \sim a_6$ は一次独立。これら5本のベクトルは $V = \mathbb{R}^5$ の基底となれる。 $\dim(W_1 + W_2) = 5$

(2) $y \in (W_1 \cap W_2)$ とすると、$y = \sum_{i=1}^{3} t_i a_i = \sum_{i=4}^{6} t_i a_i$ より

(1)と同様に
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ -t_4 \\ -t_5 \\ -t_6 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} t_1 = t_2 = -t_4 \\ t_3 = t_5 = t_6 = 0 \end{array}$$ であるから、

$y = t_4(-a_4)$ と表せる。 よって基底 a_4, $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$

09-$\boxed{4}$ (3) $\mathbb{Z} \in (W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp})$ とすると

$(\mathbb{Z}, a_i) = 0 \quad (i = 1 \cdots 6)$

$Z = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$ とすると
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \mathbb{O}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ | \\ | \\ | \\ e \end{pmatrix} = \mathbb{O} \quad \Leftrightarrow \quad a = b = c = d = 0.$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{Z} = \mathbb{O}$$

より $\dim(W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}) = 0$

09-$\boxed{5}$ (1) $^\forall X, Y \in V$ に対し，$f(X+Y) = B(X+Y)C = BXC + BYC$
$= f(X) + f(Y)$.

$^\forall \lambda \in \mathbb{R}$ に対し，$f(\lambda X) = B(\lambda X)C = \lambda BXC$
$= \lambda f(X)$. ■

(2) $\begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \end{pmatrix} \in V$ に対し

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = O$ とすると．
— ①

$$\begin{pmatrix} 2p+s & 2(p+q)+s+t & 2(p+q+r)+s+t+u \\ 4p+as & 4(p+q)+a(s+t) & 4(p+q+r)+a(s+t+u) \end{pmatrix} = O$$

$a=2$ のとき，$\begin{pmatrix} 2p+s \\ 2q+t \\ 2r+u \end{pmatrix} = \mathbf{0}$.

$a \neq 2$ のとき，① に 左から $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & a \end{pmatrix}^{-1}$，右から $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ をかけると
$\begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \end{pmatrix} = O$

つまり，$a=2$ のとき，$f(X) = BXC = O$
$\Leftrightarrow X = p\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ と表せる。

この3つの行列は明らかに一次独立なので，$\dim \mathrm{Ker} f = 3$
このとき，$\dim \mathrm{Im} f = \dim V - \dim \mathrm{Ker} f = 3$
$a \neq 2$ のとき，明らかに $\mathrm{Ker} f = \{O\}$ つまり $\dim \mathrm{Ker} f = 0$.
$\dim \mathrm{Im} f = 6$.

09-5 続 (3) $S = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$ $T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ とする。

Vの基底を $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ……$v_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

$g_{S,T}(v_1) = \begin{pmatrix} w & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} wa & wb & wc \\ ya & yb & yc \end{pmatrix}$

$g_{S,T}(v_2) = \begin{pmatrix} 0 & w & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} wd & we & wf \\ yd & ye & yf \end{pmatrix}$

より

$$\left(g_{S,T}(v_1) \cdots g_{S,T}(v_6)\right) = (v_1 \cdots v_6)\begin{pmatrix} wa & wd & wg & xa & xd & xg \\ wb & we & wh & xh & xe & xh \\ wc & wf & wi & xc & xf & xi \\ ya & yd & yg & za & zd & zg \\ yb & ye & yh & zh & ze & zh \\ yc & yf & yi & zc & zf & zi \end{pmatrix}$$

…ゴメン やっぱムリ。

加藤さんによると

$$P^{-1} g_{S,T} Q = \underbrace{P^{-1} S P}\ \underbrace{P^{-1} X Q}\ \underbrace{Q^{-1} T Q}$$ のように変形するらしい。

キテイのとりかえ　わかんない。

出題時、誰も解けなかったらしいのでスルー。