数学 II　期末試験問題　2009 年 2 月 10 日 (火) 4 限　担当：加藤晃史

※ 解答する問題の順序は問わないが，問題番号を大きくはっきり書くこと
※ 試験時間 90 分
※ ノート・参考書などの持ち込み不可
※ 特にことわりのない限り考え方や計算の途中経過等も解答用紙に書くこと

1 $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ とする．$B = P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P および対角行列 B を求めよ．

2 V を変数 x の 2 次以下の実係数多項式全体のなすベクトル空間とし，$E = (1, x, x^2)$ をその基底とする．線形変換 $T : V \to V$ を，

$$(Tf)(x) = (x-1)\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + (x-1)\frac{df(x)}{dx} + x(x+2)f(1) + f(-x) \qquad (f \in V)$$

で定義する．以下の問に答えよ．

(1) $F = (-1+x^2,\ -1-x+x^2,\ 4-3x^2)$ も V の基底であることを示せ．
(2) 線型変換 T の基底 E に関する表現行列 A を求めよ．
(3) 線型変換 T の基底 F に関する表現行列 B を求めよ．
(4) 線型変換 T が対角化可能か否かを判定し，その根拠を示せ．

3 $\mathbb{R}$ で定義された実数値連続関数全体からなるベクトル空間 V を考える．V の部分空間 $V_\pm$ を

$$V_+ = \{f \in V \mid f(-x) = f(x)\}, \qquad V_- = \{f \in V \mid f(-x) = -f(x)\}$$

で定める．

(1) $V = V_+ \oplus V_-$ であることを示せ．
(2) 指数関数 e^x および $\sin(x+\alpha)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ を V_+ の元と V_- の元の和として表せ．

4 $V = \mathbb{R}^5$ のベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_6 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から生成される線形部分空間

$$W_1 = \mathbb{R}\boldsymbol{a}_1 + \mathbb{R}\boldsymbol{a}_2 + \mathbb{R}\boldsymbol{a}_3, \qquad W_2 = \mathbb{R}\boldsymbol{a}_4 + \mathbb{R}\boldsymbol{a}_5 + \mathbb{R}\boldsymbol{a}_6$$

について，以下の問に答えよ．

(1) $W_1 + W_2$ の基底と次元を求めよ．
(2) $W_1 \cap W_2$ の基底と次元を求めよ．
(3) $V = \mathbb{R}^5$ を標準内積に関するユークリッド空間と見なすとき，$\dim(W_1^\perp \cap W_2^\perp)$ を求めよ．

5 ベクトル空間 $V = M_{2,3}(\mathbb{R})$ を考える．ただし $M_{m,n}(\mathbb{R})$ は実 $m \times n$ 行列全体の集合を表す．また

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & a \end{pmatrix} \qquad (a \in \mathbb{R}) \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおき，$f : V \to V$ を，$X \in V$ に対し $f(X) = BXC \in V$ を対応させる写像として定義する．

(1) f が線型写像であることを示せ．
(2) f の像 $\mathrm{Im} f$ および核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求めよ．
(3) $S \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, $T \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ に対し，線型変換 $g_{S,T} : V \to V$ を $g_{S,T}(X) = SXT$ $(X \in V)$ で定義する．S, T を動かしたときに $\dim \mathrm{Im}\, g_{S,T}$ が取りうる値をすべて求めよ．

数学 II　期末試験問題　2008 年 2 月 12 日 (火) 4 限　　担当：加藤晃史

※ 試験時間 90 分，解答用紙 (両面) 2 枚，計算用紙 1 枚
※ ノート・参考書などの持ち込み不可
※ 特にことわりのない限り考え方や計算の途中経過等も解答用紙に書くこと

1　V を変数 x の 4 次以下の実係数多項式全体のなすベクトル空間とする．線形変換 $f: V \to V$ を，

$$f(\varphi) = (x-1)\frac{d\varphi(x)}{dx} \qquad (\varphi \in V)$$

で定義する．以下の問に答えよ．

(1)　V の基底 $E = \{1,\, x,\, x^2, x^3, x^4\}$ に関する f の表現行列を求めよ．

(2)　核 $\mathrm{Ker}\, f$ の基底と次元を求めよ．

(3)　像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求めよ．

(4)　f の特性多項式およびすべての固有値を求めよ．

(5)　f を対角化せよ。すなわち f の表現行列が対角行列になるような基底 F と，E を F に取り替える行列 P を求めよ．

2　$V = \mathbb{R}^5$ の線形部分空間 W_1, W_2 を，行列

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

を用いて $W_i = \mathrm{Ker}\, A_i = \{\boldsymbol{x} \in V \mid A_i \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ と定める．$(i = 1, 2)$

(1) $W_1 \cap W_2$ の基底と次元を求めよ．

(2) $W_1 + W_2$ の基底と次元を求めよ．

(3) 部分空間に関する次元定理を述べ，それを上記の場合に確認せよ．

3　行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の問に答えよ．

(1)　A のすべての固有値とその重複度を求めよ．

(2)　A の各固有空間について，その基底を求めよ．

(3)　${}^tUAU$ が対角行列となるような直交行列 U を求めよ．

(4)　A の最大固有値に対応する固有空間を W とする．W への直交射影を表す行列を求めよ．

4　$A^2 - 2A + I = 0$ を満たす正方行列 A で、対角化不可能なものの例を作れ。対角化不可能である理由も説明すること。

5　W_1, W_2 をベクトル空間 V の線形部分空間とする．その和集合 $W_1 \cup W_2$ が V の線形部分空間ならば，$W_1 \subset W_2$ または $W_2 \subset W_1$ であることを証明せよ．

6　V, V' を K 上のベクトル空間，$f: V \to V'$, $g: V \to V'$ を線形写像とする．このとき，任意の $a, b \in K$ に対し，$\mathrm{rank}(af + bg) \leq \mathrm{rank}\, f + \mathrm{rank}\, g$ が成り立つことを証明せよ．ただし，$af + bg$ は $(af+bg)(\boldsymbol{x}) = af(\boldsymbol{x}) + bg(\boldsymbol{x})$ $(\forall \boldsymbol{x} \in V)$ で定まる線形写像である．

2004 年度冬学期 数学 II　期末試験問題

2005 年 2 月 9 日 4 限　　　担当：加藤晃史

※試験時間 90 分．解答用紙（両面）2 枚，計算用紙 1 枚
※ノート・参考書などの持ち込み不可
※特にことわりのない限り考え方や途中経過等も解答用紙に書くこと

$\boxed{1}$　「線型空間 V が部分空間 $W_1, W_2, \ldots, W_r$ の直和である」ことの定義を述べよ．

$\boxed{2}$　変数 x の 3 次以下の複素係数多項式全体のなすベクトル空間を V とし，$V' = \mathbb{C}^3$ とする．線型写像 $T : V \to V'$ を，x の多項式 f に対し，$x = 1, x = 2, x = 3$ での f の値を並べてできる 3 項縦ベクトル

$$T(f) = \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix} \qquad (f \in V)$$

を対応させる写像として定義する．以下の問に答えよ．

(1)V の基底 $E = \{1, x, x^2, x^3\}$ および V' の基底 $E' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ に関して T を行列表示せよ．

(2) 核空間 $\mathrm{Ker}T$ の基底と次元を求めよ．

(3) 像空間 $\mathrm{Im}T$ の基底を次元を求めよ．

(4) 表現行列ができるだけ簡単になるような V の基底 F と V' の基底 F' を選んで T を行列表示せよ．

$\boxed{3}$　複素数 a を含む次の行列を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

(1)A の特性多項式を求めよ．

(2)「どのような複素数 a に対しても，行列 A は対角化可能である」という主張は正しいか，誤りであるかを判定せよ．最初に結論を述べ，次にその証明を与えよ．

$\boxed{4}$　A を実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -3 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

とする．以下の問いに答えよ.
(1)A のすべての固有値とその重複度を求めよ.
(2)$D = P^{-1}AP$ が対角行列となるような，実直交行列 P と対角行列 D を求めよ.
(3)$F(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ で定まる $\mathbb{R}^4$ 上の二次形式 F の符号数とその Sylvester 標準形を求めよ.（どのような座標変換が必要かは答えなくてよい.）

$\boxed{5}$　(m,n) 型行列 A, B に対して，

$$\mathrm{rank}(A+B) \leq \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B$$

が成り立つことを証明せよ.