08-$\boxed{3}$ (1) $\Phi_A(x) = \begin{vmatrix} x+2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x-2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & x \end{vmatrix} = (x+2)\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x-2 & -1 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & x-2 & -1 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ x & 1 & 1 \\ 1 & x-2 & -1 \end{vmatrix}$

$= x^2(x-3)(x+3)$ より

固有値	0	3	−3
重複度	2	1	1

(2) 1について $A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0$ とすると $\begin{cases} a = c+d \\ b = 2c+d \end{cases}$

よって $Ax = 0 \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} c+d \\ 2c+d \\ c \\ d \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ なので $c, d \in \mathbb{R}$

この2つは一次独立なので 基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3について $A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ とすると. $\begin{cases} a = 0 \\ b = -d \\ c = 2d \end{cases}$ となので.

$Ax = 0 \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times d$ よって. 基底は $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

−3について $A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ とすると $\begin{cases} a = -2d \\ b = d \\ c = 0 \end{cases}$ となので

$Ax = 0 \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ よって 基底は $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) Aは対称行列なので異なる固有値の固有ベクトルは標準内積について直交する。

固有値1に対する固有ベクトルを直交化する。$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ として

v_2を $v_2 - \frac{(v_1, v_2)}{\|v_1\|^2} v_1$ で置き換えると

$v_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ あらためてこの2倍を $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とする。

これで全ての固有ベクトルは直交する。これらを規格化して並べ, $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt6} & 0 & \frac{-2}{\sqrt6} \\ \frac{2}{\sqrt6} & 0 & \frac{-1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt6} \\ \frac{1}{\sqrt6} & \frac{-1}{\sqrt6} & \frac{2}{\sqrt6} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt6} \end{pmatrix}$

とすると ${}^tUAU = U^{-1}AU$ は対角行列。

08-[3] 続

(4) $W = \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\\1\end{pmatrix}$ 、 (3)で求めた4つの基底は$\mathbb{R}^4$の基底なので

$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow W$ を表す行列を求める。 $v \in \mathbb{R}^4$について

$v = c_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0\\-1\\2\\1\end{pmatrix} + c_4\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{4} c_i v_i$ とする。 $c_i \in \mathbb{R}$

$f(v_i) = \delta_{i3}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\\1\end{pmatrix}$ であるから、表現行列Aは (1,4)型で

$\left(0 \quad 0 \quad \begin{pmatrix}0\\-1\\2\\1\end{pmatrix} \quad 0 \right) = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\\1\end{pmatrix} A$ より

$A = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$ ∴表現行列 $(0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$

08-[4] $A = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ とすると $(A-I)^2 = O$ をみたす

Aの固有値は 1 (重複度2) である。

$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ とすると $a = b = 0$ より

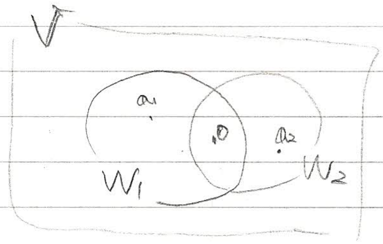
固有値1の固有空間の基底は $\{0\}$ なので次元は $0 \neq 2$

よってAは対角化不可能である。

08-[5] 対偶を示す。つまり

「$W_1 \not\subset W_2$ かつ $W_2 \not\subset W_1 \Rightarrow W_1 \cup W_2$ はVの線型部分空間でない」

を示す。$0 \in W_1 \cap W_2$ であるから $W_1 \cap W_2 \neq \phi$



$a_1 \in W_1 \setminus W_2$, $a_2 \in W_2 \setminus W_1$ として

$v = a_1 + a_2$ を考える

$v \in W_1$ と仮定すると W_1 はVの線型部分空間なので $a_2 = v + (-a_1) \in W_1$ となり $a_2 \in W_2 \setminus W_1$ に矛盾する

よって $v \notin W_1$ 同様にして $v \notin W_2$ よって $v \notin W_1 \cup W_2$

つまり「$a_1, a_2 \in W_1 \cup W_2$

$\cancel{\Rightarrow}$ $a_1 + a_2 \in W_1 \cup W_2$」が示された。よって

$W_1 \cup W_2$ はVの線型部分空間でない。 ∎

No. 4 Date

08-$\boxed{6}$ $x \in V$ に対し

$$(af+bg)(x) = af(x) + bg(x) = f(ax) + g(bx) \quad \text{より,}$$

$$\cap \qquad\qquad \cap \qquad\qquad \cap$$

$$\mathrm{Im}(af+bg) = \mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g$$

和空間についての次元定理より.

$$\mathrm{rank}(af+bg) = \dim(\mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g) = \dim \mathrm{Im}f + \dim \mathrm{Im}g - \dim(\mathrm{Im}f \cap \mathrm{Im}g)$$

$$\leq \dim \mathrm{Im}f + \dim \mathrm{Im}g$$

$$= \mathrm{rank}f + \mathrm{rank}g.$$