04-[1] $\forall v \in V$ に対し各 $w_i \in W_i$ $(i=1\cdots r)$ が唯一組存在し、

$v = \sum_{i=1}^{r} w_i$ が成り立つこと。

04-[2] (1) $T(1) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $T(x) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $T(x^2) = \begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}$ $T(x^3) = \begin{pmatrix}1\\8\\27\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\8\\27\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&3&9&27\end{pmatrix}$$

より T の表現行列は $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&3&9&27\end{pmatrix}$.

(2) $\mathrm{Ker}\,T = \{f \in V \mid f(1) = f(2) = f(3) = 0\}$ より

$f \in \mathrm{Ker}\,T \iff f(x) = c(x-1)(x-2)(x-3) \quad c \in \mathbb{C}$

$\therefore \mathrm{Ker}\,T$ の基底は $(x-1)(x-2)(x-3)$, 次元は 1

(3) 次元定理より $\dim \mathrm{Im}\,T = \dim V - \dim \mathrm{Ker}\,T = 4 - 1 = 3$.

$\mathrm{Im}\,T \subset \mathbb{C}^3$ であるから $\mathrm{Im}\,T = \mathbb{C}^3$. よって $\mathrm{Im}\,T$ の基底は

$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, 次元は 3.

(4) 表現行列が $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ であるものを考える。

$F = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ $F' = \{e_1', e_2', e_3'\}$ とすると

$$\begin{pmatrix}T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) & T(e_4)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e_1' & e_2' & e_3'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$ より

$T(e_1) = e_1'$ $T(e_2) = e_2'$ $T(e_3) = e_3'$ $T(e_4) = 0$.

(2) より $e_4 = (x-1)(x-2)(x-3)$

No. 2 Date

$e_1 = 1 \quad e_2 = (x-1) \quad e_3 = (x-1)(x-2)$ とすると

$e_1' = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad e_2' = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \quad e_3' = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ である。

次に F が V の基底であることを示す。

$\forall f \in V$ に対し、x^3 の係数を e_4 で x^2 の係数を e_3 で… 定数項を e_1 で調節することで、f を $e_1 \sim e_4$ の和で表せる。

また $\sum_{i=1}^{4} c_i e_i = 0$ とすると x^4 の係数についての条件より $c_4 = 0$

同様にして $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$.

以上より F は V の基底。

次に F' が V' の基底であることを示す

$\forall v \in V' = \mathbb{C}^3$ は $v = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ と表せる $a, b, c \in \mathbb{R}$. このとき

$v = a\, e_1 + (b-a)\, e_2 + \frac{1}{2}(a-2b+c)\, e_3$ と一意的に表せる。

すなわち F' は V' の基底。

以上より F, F' を基底にとったとき、T の表現行列は $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

となる。

04-$\boxed{3}$ (1) $\Phi_A(x) = \begin{vmatrix} x-2 & -a & -3 \\ 1 & x+2 & 1 \\ 0 & 4 & x+1 \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} x+2 & 1 \\ 4 & x+1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -a & -3 \\ 4 & x+1 \end{vmatrix}$

$= (x^2+a-8)(x+1)$

(2) 問(1)の主張は誤りである。これを以下で示す。
(1)より、Aの固有値は $-1, \pm\sqrt{8-a}$ である。
$a \neq 8$ のとき、固有値は3つ存在するので対角化可能。
$a=8$ のとき、固有値は -1 と 0。
0の重複度は2であるので、この固有空間について。

$A\boldsymbol{x} = 0$ とすると $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ として、

$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = -4y \end{cases}$ より、

固有値0の固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ なので次元は1 $(\neq 2)$

以上より $a=8$ の時、Aは対角化不可能である。■

04-$\boxed{4}$ $\Phi_A(x) = \begin{vmatrix} x & 3 & 0 & -3 \\ 3 & x+4 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & x+1 & -4 \\ -3 & 1 & -4 & x+4 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} x+4 & -4 & 1 \\ -4 & x+1 & -4 \\ 1 & -4 & x+4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -4 & x+1 & -4 \\ 1 & -4 & x+4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ x+4 & -4 & 1 \\ -4 & x+1 & -4 \end{vmatrix}$

$\cdots = (x-3)^2(x+6)(x+9)$

∴

固有値	3	−6	−9
重複度	2	1	1

各固有ベクトルを求める。固有値−9について

$A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = -9\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ とすると、$\begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 & 3 \\ -3 & 5 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & 8 & 4 \\ 3 & -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = d \\ c = -d \end{cases}$

∴固有ベクトルの1つは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

固有値 -6 について

$$A\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=-6\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}6&-3&0&3\\-3&2&4&-1\\0&4&5&4\\3&-1&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=-d\\b=-d\\c=0\end{cases}$$ より 固有ベクトルの1つは $\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$

固有値 3 について

$$A\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-3&-3&0&3\\-3&-7&4&-1\\0&4&-4&4\\3&-1&4&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0&1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=-c+2d\\b=c-d.\end{cases}$$ より $Ax=3x \Leftrightarrow x=\begin{pmatrix}-c+2d\\c-d\\c\\d\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

より、固有値3の固有空間の基底として

$v_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ をとれる。 $v_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $v_4=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ とすると.

Aは対称行列なので $(v_1$ と v_3 と $v_4)$, $(v_2$ と v_3 と $v_4)$ はどれも標準内積について直交する。

次に v_1 と v_2 を直交化させる。v_2 を $v_2-\dfrac{(v_1,v_2)}{\|v_1\|^2}v_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}-\dfrac{-3}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ でおきかえ

あらためて $v_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ とすると $v_1\sim v_4$ はどの2つも互いに直交する

よって $P=\begin{pmatrix}-1&2&0&-1\\1&-1&1&-1\\1&0&-1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}$ とするとPは直交行列

$$D=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&-9&0\\0&0&0&-6\end{pmatrix}.$$

(3)は多分習ってないです…

04-5

(3) A, Bをそれぞれ表現行列とする $V \to V'$ の線型写像を f, g とする。

Vの基底を $E=\{e_1, \cdots e_n\}$ V'の基底を $E'=\{e_1', \cdots e_m'\}$ とすると

$$(f(e_1) \cdots f(e_n)) = (e_1' \cdots e_m')\, A$$

$$(g(e_1) \cdots g(e_n)) = (e_1' \cdots e_m')\, B$$ であるから

$$((f+g)(e_1) \cdots (f+g)(e_n)) = (e_1' \cdots e_m')\,(A+B)$$ なので

$A+B$は $(f+g): V \to V'$ の表現行列である。

($\forall x \in V$ に対し $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \in V'$ を表す)

行列のランクはその行列の表す線型写像の像(Im)の次元であるから

示すべき不等式は $\dim \mathrm{Im}(f+g) \leq \dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Im} g$.

また $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ で $f(x) \in \mathrm{Im} f$, $g(x) \in \mathrm{Im} g$ だから

$$\mathrm{Im}(f+g) = \mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g \quad (\text{和空間})$$

和空間についての次元定理より

$$\dim \mathrm{Im}(f+g) = \dim(\mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g) = \dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Im} g - \dim(\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g)$$
$$\leq \dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Im} g.$$

以上より $\mathrm{rank}(A+B) \leq \mathrm{rank} A + \mathrm{rank} B$ ■

一行目の線型写像は存在するのか…? A=Oとかだったら存在しないかも。