問題1. $\{a_n\}$ は実数列, N は自然数. $a_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$ のとき) であって,

$$1 + \frac{1}{3n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad (n \in \mathbb{N} \text{ かつ } n \geq N \text{ のとき})$$

が成り立つと仮定する. このとき, $a_n \longrightarrow +\infty$ ($n \to \infty$) が成り立つことを示せ.

問題2. a は実数. 区間 $[a, +\infty)$ を I とあらわす. f は I を定義域とする実数値連続函数. $f(x) > 0$ ($x \in I$ のとき) が成り立ち, $f(x) \to 0$ ($x \to +\infty$) が成り立つと仮定する. このとき, I 上で f の最大値が存在することを示せ.

(注意) 有界閉区間上の実数値連続函数に対する中間値の定理と最小値・最大値の存在定理は証明なしに用いてよいものとする.

(内9.1)

問題3. a, b, c は, $a < c < b$ をみたす実数. 開区間 (a, b) を I とあらわす. f は, I を定義域とする実数値函数. f は c で微分可能かつ $f'(c) < 0$ であると仮定する. このとき, $\alpha < c < \beta$ をみたす I の元 α, β が存在して次の(イ), (ロ)が成り立つことを示せ.

(イ) $f(x) > f(c)$ ($x \in (\alpha, c)$ のとき).

(ロ) $f(x) < f(c)$ ($x \in (c, \beta)$ のとき).

内(10.3)

問題4.

(1) 正の実数 α と x に対して次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\min\{x^{\alpha-1}, (x+1)^{\alpha-1}\} \leq \frac{(x+1)^{\alpha} - x^{\alpha}}{\alpha} \leq \max\{x^{\alpha-1}, (x+1)^{\alpha-1}\}.$$

(2) α は, $\alpha > 1$ である実数. I は区間 $(0, +\infty)$ をあらわす. I を定義域とする函数 $f(x) = (x+2)^{\alpha} - 2(x+1)^{\alpha} + x^{\alpha}$ は, $x \longrightarrow +\infty$ のとき極限を持つことを示し, 極限を求めよ. ただし, 極限は $-\infty$, $+\infty$ である場合を含む.

((2)のヒント) $g(x) = (x+1)^{\alpha} - x^{\alpha}$ ($x \in I$) と定めると, $f(x) = g(x+1) - g(x)$ ($x \in I$) である.

問題 1.

$m > 3$ となる m をとると.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 + \frac{1}{3n}$, また, 2項定理より.

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^m \geq \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^m \geq 1 + \frac{m}{3n} \geq 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$$

$(\because m > 3.)$

$$\therefore \frac{(a_n)^m}{n} \geq \frac{(a_{n-1})^m}{n-1} \geq \cdots \geq \frac{(a_N)^m}{N}$$

$$\rightarrow (a_n)^m \geq \frac{(a_N)^m}{N} \cdot n. \quad (\forall n \geq N)$$

ここで, 実数 M が任意に与えられたとする。アルキメデスの原理より.

$|M|^m < \frac{(a_N)^m}{N} \cdot n_1$ をみたす自然数 n_1 がとれる.

$N' = \max\{N, n_1\}$ と定めると, $n \geq N'$ である $n \in \mathbb{N}$

に対して.

$$(a_n)^m \geq \frac{(a_N)^m}{N} n \geq \frac{(a_N)^m}{N} n_1 > |M|^m$$

が成り立つ. $a_n > 0$ より.

$(a_n)^m > |M|^m \iff a_n > |M|$, 又 $M \leq |M|$ より

$$a_n > M \quad (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N') \quad \cdots\cdots (*)$$

が任意の実数 M について成り立つ. すなわち, いかなる $M \in \mathbb{R}$ に対しても $(*)$ をみたすような $N' \in \mathbb{N}$ がとれることがわかった。

したがって, $a_n \longrightarrow +\infty \ (n \to \infty)$ であることが分かる.

NO.

DATE

問題2.

$f(x) \to 0 \ (x \to \infty)$ かつ f は I で連続で, $f(x) > 0 \ (^\forall x \in I)$ だから

$f(x) < f(a) \quad (^\forall x \in I, \ x > b)$ ---- ①

をみたす実数 b を取れる。

閉区間 $[a, b]$ においても $f(x)$ は連続で, 最大値をもつから,

これを $f(c)$ とする $(c \in [a, b])$. すると, $f(c)$ は I 上の

関数としての f の最大値となる.

(i) $a \leq x \leq b$ のとき. $x \in [a, b]$ だから

$f(x) \leq \max f([a, b]) = f(c)$

(ii) $b < x$ のとき. $f(x) < f(a) \quad (\because ①)$

$\leq \max f([a, b]) = f(c)$

以上から, f は I 上で最大値を持つ.

問題3 $x \to c$ のとき $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ は $f'(c)$ に収束するから, $f'(c) < 0$ より

次が成り立つ正数 δ が取れる.

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \right| < -f'(c) \qquad (^\forall x \in I^*(c; \delta))$$

よって $x \in I^*(c; \delta)$ のとき, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0$ である.

I は開区間であって, $c \in I$ であるから, $I \cap (c - \delta, c)$ と

$I \cap (c, c + \delta)$ はともに空でない. α, β を $\alpha \in I \cap (c - \delta, c)$,

$\beta \in I \cap (c, c + \delta)$ をみたすようにとる.

これとで, $\alpha < c < \beta$ となる.

(イ) $x \in (\alpha, c)$ のとき, $x \in I^*(c; \delta)$ だから

$\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0$ また $x < c$ より $x - c < 0$

よって, $f(x) - f(c) > 0$ すなわち, $f(x) > f(c)$. //

(ロ) $x \in (c, \beta)$ のとき. 同様に.

$\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0$, $c < x$ より, $x - c > 0$ なので.

$f(x) - f(c) < 0$ すなわち $f(x) < f(c)$ //

問題4

(1) $h(x) = x^{\alpha}$ とすると，平均値の定理より

$$\frac{h(x+1)-h(x)}{(x+1)-x} = h'(c_x) \quad , \quad x < c_x < x+1 \text{ となる}$$

c_x が存在し，

$$(x+1)^{\alpha} - x^{\alpha} = \alpha (c_x)^{\alpha-1}$$ また，$x^{\alpha-1}$ は α の値に関らず，

狭義単調変化する関数だから，$x < c_x < x+1$ より

$$\frac{(x+1)^{\alpha} - x^{\alpha}}{\alpha} = (c_x)^{\alpha-1}$$

$$\Rightarrow \min\left\{x^{\alpha-1}, (x+1)^{\alpha-1}\right\} \leq \frac{(x+1)^{\alpha} - x^{\alpha}}{\alpha} \leq \max\left\{x^{\alpha-1}, (x+1)^{\alpha-1}\right\}$$

(2) $g(x) = (x+1)^{\alpha} - x^{\alpha}$ $(x \in I)$ とすると，

$f(x) = g(x+1) - g(x)$ と表せる．平均値の定理より

$$f(x) = \frac{g(x+1) - g(x)}{(x+1) - x} = g'(c_x) \quad \text{かつ} \quad x < c_x < x+1$$

が成りたつ $c_x \in \mathbb{R}$ がとれることが分かる。$g'(x)$ は $(0, +\infty)$ で

広義単調だから $x \in I$ のとき

$$\min\left\{g'(x), g'(x+1)\right\} \leq f(x) \leq \max\left\{g'(x), g'(x+1)\right\}$$

よって $g'(x), g'(x+1)$ が $x \to +\infty$ のとき同じ極限を持つならば

その極限は $f(x)$ の極限でもある．$x \in I$ のとき

$$g'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} - 1\right\}, \quad g'(x+1) = \alpha (x+1)^{\alpha-1}\left\{\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{\alpha-1} - 1\right\}$$

だから，次が分かる．

$$\lim_{x\to\infty} g'(x) = \lim_{x\to\infty} g'(x+1) = \begin{cases} 0 & (0 < \alpha < 1) \\ 1 & (\alpha = 1) \\ +\infty & (1 < \alpha) \end{cases}$$

以上より

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & (0 < \alpha < 1) \\ 1 & (\alpha = 1) \\ +\infty & (\alpha > 1) \end{cases}$$

//