数学2　加藤晃史　2007年過去問解答
間違い、誤植は覚悟してね♪byハマ

質問があれば俺まで。口調が気に入らんとかの文句は受け付けませんw

一、$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ をテキトーに基本変形して、

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 19 & -11 & -17 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -12 & 7 & 11 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & -3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ だから答えは $\begin{pmatrix} -8 & 4 & 7 & 3 \\ 19 & -11 & -17 & -8 \\ -12 & 7 & 11 & 5 \\ 6 & -3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

二、$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 10 & 9 & 12 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & 4 & 6 & a \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 9 & b \end{pmatrix}$ をテキトーに基本変形して、

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2b-30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3a-2b+12 \\ 3 & 0 & 0 & 9 & -3 & -2b+12 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 & b-3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ 　x_3, x_5 が列交換により交換されてるので注意

上2式から b=-15 , a = -14

要するに $\begin{matrix} 3x_1+9x_4-3x_3=42 \\ 3x_5-3x_4=-18 \\ x_2+2x_4+5x_3=-3 \end{matrix}$ 一般解は $\begin{matrix} x_1=s \\ x_2=-5s-17t-35 \\ x_3=s+3t+4 \\ x_4=t+6 \\ x_5=t \end{matrix}$

三、 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ とする。

各条件より

$$\begin{aligned} a+b+c+d+e&=1 \\ 4a+3b+2c+d&=0 \\ 16a+8b+4c+2d+e&=-1 \\ 32a+12b+4c+d&=0 \end{aligned}$$

拡大係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & -1 \\ 32 & 12 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を基本変形すると $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & -19 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -13 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

要するに
$$\begin{aligned}4a-e&=9\\2b+3e&=-19\\4c-13e&=45\\-d-3e&=3\end{aligned}$$

答えは任意の実数 e を用いて、

$$f(x)=\frac{e+9}{4}x^4-\frac{3e+19}{2}x^3+\frac{13e+45}{4}x^2-3(e+1)x+e$$ と表せるもの。

四、例 $A_4=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$ $B_4=\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&1&2&1\\1&2&1&0\\2&1&0&0\end{pmatrix}$

(1)An は n が奇数のとき、(n-1)/2 回の行(または列)交換で Bn となり、
n が偶数のとき、n/2 回の行(または列)交換で Bn となる。
よって
交換が奇数回のとき、すなわち、n=2,3,6,7,10,11…4k-2,4k-1(k=1,2,3,…)
のとき、detAn=-detBn
交換が偶数回のとき、すなわち、n=1,4,5,8,9…4k-3,4k(k=1,2,3…)
のとき detAn=detBn

(2)3×3 行列の行列式の公式は覚えるか導出できるようにしときましょう w

$$detA_1=det(2)=2 \quad detA_2=det\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}=3 \quad detA_3=det\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}=4 \quad detA_4=5$$

とりあえず余因子展開くらい書いておいて、3×3 の公式は自明ってことで使ってよいでしょう。
以上にめんどいんでここでは割愛。ごめんね

(3)多分 $detA_n=n+1$ でしょう。detBn もこれから(1)を使ってすぐわかります。
ってことでこれ↑を証明。
帰納法かなぁ…
n=4 までは成立、n=K-1、K で成り立つと仮定すると、

$$detA_{K+1}=2\mathrm{detA}_K-det\begin{pmatrix}1&0&0&0&...&0\\1&2&1&0&...&0\\0&1&2&1&...&0\\0&0&1&2&...&0\\...&...&...&...&...&...\\0&0&0&0&...&2\end{pmatrix}$$ (余因子展開ね)

$detA_{K+1}=2\mathrm{detA}_K-detA_{K-1}$ (1 行目と 1 列目消しても行列式不変)
=2(n+1)-n
=n+2
より、すべての自然数 n に対して $detA_n=n+1$

(1)より、n=4k-2,4k-1 のとき、 $detB_n = -n-1$
n=4k-3,4k のとき、 $detB_n = n+1$

五、自信無し

多分正しいはず。うまく書けんけど…

A→ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0' \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0' \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0' \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0' \\ 0' & 0' & 0' & 0' & 0' \end{pmatrix}$ ＝C という基本変形が可能とする。
(1 の数は rankA , 0'は実際もっとたくさんの 0。)

B= $\begin{pmatrix} A & X \\ Y & Z \end{pmatrix}$ とすると

B→ $\begin{pmatrix} C & X' \\ Y' & Z \end{pmatrix}$ という基本変形が可能

つまり

B→ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0' & 0' & 0' & 0' & 0' & ?' & ?' & ?' & ?' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ?' & ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ?' & ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$ みたいな基本変形が可能

0'と？'で囲まれた部分を基本変形しても左上の部分は不変。
この部分に 0 と 1 が並ぶように基本変形すると、上の例では 1 が 0〜3 個残り、全体として 1 の数（上の例では4個）が増えるはず。
よって $rankA \leq rankB$
以上をもうチョイ数学的に頑張れば良いかと。

六、(´д`)ﾜｶﾗﾝ

8.28 加筆
とりあえず「同一平面上⇒行列式 0」は ﾜｶｯﾀ(☆∀☆)

$\boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} 1 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ とし、 $\boldsymbol{q}', \boldsymbol{r}', \boldsymbol{s}'$ も同様に定める。与えられた行列をAとすると、

$A = (\boldsymbol{p}', \boldsymbol{q}', \boldsymbol{r}', \boldsymbol{s}')$

4点が同一平面上にあるので、実数u,vが存在して、
$\boldsymbol{s}' = (1-u-v)\boldsymbol{p}' + u\boldsymbol{q}' + v\boldsymbol{r}'$ と書ける。

Aに代入して交代多重線形性を使えばdetA=0

逆もうまくさかのぼれば出来るかな…

多分一次従属とか使うんだと思います。

てかまぁ,p,q,rをとおる平面の方程式出して、sがその式を満たすという式が、
行列式を余因子展開して頑張って出した式と同じになることを示せばいいんですね。
こうなると鬼畜ゲーなんでいい方法あるはずですが…

8.30加筆。

演習その7によると、n次正方行列に対して
行列式=0 ⇔ rank≠n ⇔ 行列をなすn本のベクトルが一次従属
だそうです。
詳しい証明とかはそちら参照で。

これを使えば、4本目の縦ベクトルは1〜3本目のベクトルの線形結合であらわせて、上の解答を遡れます。

おまけに最終確認です。

①連立一次方程式
②階数
③逆行列
④行列式

の出し方を確認。

答えは
①拡大係数行列に原則行(横)のみの基本変形。列変換を挟んだ場合は変数が入れ替わる。
②とりあえず標準形に。(0と1だけのやつ)
③右側に単位行列をくっつけ、行(横)のみの基本変形で左側に単位行列を作る。

④交換以外の基本変形に対しては行列式不変。交換はベクトルの隣接互換 1 回につき-1 倍。
そのほかにも余因子展開、転置不変性、積の行列式=行列式の積、三角行列の対角成分の積、
ワイエルストラスとクロネッカーの定理等使える公式は多いので、ノート確認必須。

ここまで完璧にしとけば半分以上確定。
特に大問3までは検算も容易な場合が多いので、計算ミスをしないよう慎重に。

練習したい人は演習の解答プリントに大量に載ってます。
失くした人はネットでほかの教員の過去問拾ってきてもいいし、
自分でテキトーに問題作れば、エクセルで解答出力もできます。

ベクトル空間に対しては、多分簡単なことしか出ないかと。
定義、線形部分空間、基底、座標、一次独立、次元
くらいなので、ノートで正確に確認しておきましょう。
よさげな練習問題見つからんかった。ｽﾏｿ。

さらに上を狙う人は基本変形とか置換の理論にも触れときましょう。

じゃ、頑張ってくださいな