(1)について　収束半径は ∞

$\because$ $\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} \dfrac{(2k+3)!}{(-1)^{k+1}} \longrightarrow +\infty \quad (k \to \infty)$ //

(2)について

～は等号

$\because$ $R_n = \dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n \Rightarrow |R_n| \leq \dfrac{|x|^n}{n!} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$

for. fixed $x \in \mathbb{R}$

例6.3.3

$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$. (略)

例6.3.4

$\mathrm{Arctan}\, x = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \quad (|x| < 1)$

(テイラー展開の定義から直接示せる)

例6.3.5 (～が＝にならない例)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

これはC^∞-級，$f^{(k)}(0) = 0 \quad (k = 0, 1 \ldots)$

準備

補題6.3.6

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$ (nは自然数)　　x^nよりもe^xの方がはるかに早く∞に発散する。

No. 36

Date

証) テイラーの定理より、

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

$$\therefore \frac{x^n}{e^x} = \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{2!}\frac{1}{x^{n-2}} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\frac{1}{x}}_{\to 0\ (x\to\infty)} + \frac{1}{n!} + \underbrace{\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\cdot x}_{\to +\infty\ (x\to\infty)}} \to 0 \quad (x \to +\infty) \quad //$$

ママ

系6.3.9

$P(x)$: 多項式 $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0 \quad //$

つづき。

$x \neq 0$ で何回でも微分できるのはよい。

x > 0 の時

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \frac{t}{e^t} \to 0 \quad (t \to \infty)$$

$\Leftrightarrow x \to +0$

つまり、 $\lim_{x\to+0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$

x < 0 の時

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{0 - 0}{x} = 0 \longrightarrow 0 \quad (x \to -0)$$

よって、

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$ すなわち、$f(x)$は$x=0$で微分可能で、$f'(0) = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to +0]{} 0$$

つまり、$f'(x)$ は $x=0$ で連続

$f'(x)$ について同様の議論を行う。

$x>0$ の時

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} \longrightarrow 0 \quad (x \to +0)$$

$x<0$ の時

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = 0 \longrightarrow 0 \quad (x \to -0)$$

$$\therefore f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = 0$$

$$f''(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3} \right) e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

$f''(x)$ は $x=0$ で連続となる（同様のアイデア）

以下、同様にくり返して

$f(x)$: C^∞ 一級、$f^{(k)}(0) = 0$ $(k = 0, 1, 2 \cdots)$ が示される。

よって、$f(x)$ のマクローリン展開は

$$f(x) \sim 0 + 0 \cdot x + \frac{0}{2!} x^2 + \frac{0}{3!} x^3 + \cdots = 0$$

（これは任意の x で収束）

つまり、テイラー級数は任意の $x\in\mathbb{R}$ で収束する。 $\left(=0\ (\text{定数関数})\right)$

$x>0$ だと、$f(x)$ とは一致しない（〜が等号にならない）

注

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases} \Longrightarrow f(x)\sim 0 \quad (\text{マクローリン展開})$$

両辺は $x=0$ でないと等しくない

つまり、テイラー展開はもとの関数を復活させないこともある。

注

・一般に、$\rho>0$ が存在して、($\rho=+\infty$ も可)

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad (x<\rho)$$

が成り立つ時、$f(x)$ は $x=a$ でべき級数展開可能、あるいは

$f(x)$ は $x=a$ で解析的であるという。

解析的な関数を C^{ω} 級関数ともいう。

C^{∞} 級 $\supsetneq$ C^{ω} 級

先の $f(x)$ は、このギャップの中に含まれる関数