No. 31

Date 11 · 10 · 水

例 6.2.9

一般二項展開

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad (|x|<1)$$

x を $-x^2$ にとりかえる。 $\alpha = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k x^{2k} \quad (|x|<1)$$

両辺を積分

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arcsin} x$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \underbrace{\int_0^x x^{2k}\, dx}_{= \frac{x^{2k+1}}{2k+1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \boxed{(-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k}} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}$$

ここで、

$$(-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^k \frac{\overbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}^{k\text{コ}}}{k!}$$

$$= \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1\right)$$

$$= \frac{1}{2^k \cdot k!} (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1))$$

$$= \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \quad \left(\begin{array}{l} (2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdots (2k-1) \\ (2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow \operatorname{Arcsin} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad (|x|<1)$$

◎ 一般二項展開からは、いろいろな関数のべき級数による表示が得られる。

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836C 5 mm ruled x 43 lines

Date

定理 6.2.10（アーベルの定理）

$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ の収束半径 ρ $(\rho \neq 0, \infty)$

もし $f(x)$ が $x=\rho$ で収束するならば、（値はわからなくてもよい）

$\lim_{x\to\rho-0} f(x) = f(\rho)$ //

※この定理は、証明しない（テキスト参照）

非常に有効

例 6.2.11（応用例）

$\mathrm{Arctan}\,x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ $(|x|<1)$ 既知

$f(x)=$ 右辺とおく。

$f(1)$ を考える。

$f(1)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2k+1} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots$

交項級数 and $\lim a_n \longrightarrow 0$ $\Longrightarrow$ $f(1)$ は収束（命題 6.1.16）

$\therefore \lim_{x\to 1-0} \mathrm{Arctan}\,x = f(1) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2k+1}$

$\qquad \| $

$\qquad \frac{\pi}{4}$

$\therefore \frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\cdots$ ⇐ 非自明！

6.3 テイラー展開

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{\text{おつり}}{R_n} \quad (\text{テイラーの定理})$$

問 $n \to \infty$ の時は?

定義

$f: X \to \mathbb{R}$　C^∞ 級　$a \in X$

この時、べキ級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ を

$f(x)$ の $x=a$ における テイラー展開 (テイラー級数) といい、

等号ではない!!

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$ とかく。

(1) テイラー級数は、あくまで形式的なべキ級数で、収束するとは限らない。

(2) 仮にテイラー級数が収束しても、もとの $f(x)$ と一致するとは限らない。

例 $a=0$ の時、

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

マクローリン展開という。(以後 おもにこれを扱う。)

例 6.3.1

$f(x) = e^x$　　$f^{(k)}(x) = e^x$

マクローリン展開

$$e^x \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \left(\because f^{(k)}(0) = 1\right)$$

(1) について　収束半径は ∞ (つまり、いつでも収束)

$\because \dfrac{a_k}{a_{k+1}} = \dfrac{(k+1)!}{k!} = k+1 \longrightarrow +\infty \quad (k \to \infty)$ //

②) について

$\sim$ は等号 ← 剰余項の評価をまじめにやる。

$(\because)$ $e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + R_n \quad \left(R_n = \frac{e^{\theta x}}{n!} x^n \quad (0<\theta<1) \right)$

$\rightarrow e^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} = \frac{e^{\theta x}}{n!} x^n \qquad (0<\theta<1)$

$x \in \mathbb{R}$ を1つ fix

$\lim_{n\to\infty} R_n = \underbrace{e^{\theta x}}_{定数} \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!}$

$= 0 \quad ((\because) \ n \gg 0 \Rightarrow |x| \ll n)$

$\therefore e^x - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 0 \quad$ for any $x \in \mathbb{R}$ //

例 6.3.2.

$f(x) = \sin x$

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \sin x & (k = 4l) \\ \cos x & (k = 4l+1) \\ -\sin x & (k = 4l+2) \\ -\cos x & (k = 4l+3) \end{cases} \qquad f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$$

$\therefore \sin x \sim 0 + 1\cdot x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{(-1)}{3!}x^3 + \cdots$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ マクローリン展開