No. 1

問題(19.1)

$$\left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx - f(c_j)(x_j - x_{j-1}) \right| \leqq \frac{L}{2}(x_j - x_{j-1})^2$$ を示す。

$$\left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx - f(c_j)(x_j - x_{j-1}) \right| = \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (f(x) - f(c_j))\,dx \right|$$

ここで、$|f(u) - f(v)| \leqq L|u-v|$ において $u = x$ $v = c_j$ とおくと、

$$\left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (f(x) - f(c_j))\,dx \right| \leqq \int_{x_{j-1}}^{x_j} |f(x) - f(c_j)| \leqq \int_{x_{j-1}}^{x_j} L|x - c_j|\,dx$$

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} L|x - c_j| = \int_{c_j}^{x_j} L(x - c_j)dx + \int_{x_{j-1}}^{c_j} L(c_j - x)dx$$

$$= \left[\frac{L}{2}(x - c_j)^2\right]_{c_j}^{x_j} - \left[\frac{L}{2}(c_j - x)^2\right]_{x_{j-1}}^{c_j}$$

$$= \frac{L}{2}\left\{(x_j - c_j)^2 + (c_j - x_{j-1})^2\right\}$$

ここで $a > 0, b > 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \leqq (a+b)^2$ より $a = x_j - c_j$ $b = c_j - x_{j-1}$ とすると、

$$\leqq \frac{L}{2}(x_j - c_j + c_j - x_{j-1})^2$$

$$= \frac{L}{2}(x_j - x_{j-1})^2$$

よって $$\left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx - f(c_j)(x_j - x_{j-1}) \right| \leqq \frac{L}{2}(x_j - x_{j-1})^2$$

$|\Delta| = \max_{1 \leqq j \leqq n}(x_j - x_{j-1})$ より、

$$\left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx - f(c_j)(x_j - x_{j-1}) \right| \leqq \frac{L}{2}(x_j - x_{j-1})|\Delta|$$

これより $j = 1, \cdots, n$ を辺々足し合わせると、

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx - f(c_j)(x_j - x_{j-1}) \right| \leqq \frac{L}{2}(b-a)|\Delta|$$

三角不等式 $|a| + |b| \geqq |a+b|$ を使うと、

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx - f(c_j)(x_j - x_{j-1}) \right| \geqq \left| \sum_{j=1}^{n} \left( \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx - f(c_j)(x_j - x_{j-1}) \right) \right|$$

$$= \left| \int_a^b f(x)dx - R(f; \Delta; c) \right|$$

つまり、$$\left| \int_a^b f(x)dx - R(f; \Delta; c) \right| \leqq \frac{L}{2}(x_j - x_{j-1})|\Delta|$$

問題 (19.2)

$f$ が定数関数のとき

$$f(x)=f(c) \quad (\forall x \in [a,b])$$

より、

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

$f$ が定数関数ではないとき

$f$ は $[a,b]$ で連続より、$f$ は積分可能で

$M=\max_{x\in[a,b]} f(x)$, $m=\min_{x\in[a,b]} f$ が存在する。

$mg(x) \leqq f(x)g(x) \leqq Mg(x)$ より積分の単調性から、

$$\int_a^b m\,g(x)\,dx \leqq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqq \int_a^b M g(x)\,dx$$

よって

$$m \leqq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leqq M$$

$f(x)\cdot g(x)$, $g(x)$ は連続かつ $g(x)\geqq 0$ であるから、中間値の定理より、

$$a<c<b \text{ かつ } f(c)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$ となる数 $c$ が存在する。

問題 (19.3)

① $f(x)=f(a)+Q(x)(x-a)$ となるように $Q(x)$ をおくと、

$x=a$ のときは明らかに式が成り立つ。

$x\in[a,b]$ のとき、

$$Q(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$f(x)-f(a)$ は連続であり、$x-a>0$ でこれも連続である。

よって $Q(x)$ も連続である。よって

$$Q(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & (x\in(a,b]) \\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a) & (x=a) \end{cases}$$

とすれば $Q(x)$ は $[a,b]$ で連続である。

No.2

② 次に $Q(x)=f'(c_x)$ となる $c_x \in [a,b]$ が各 $x \in [a,b]$ に対してとれることを証明する

関数 $f$ は $C^1$ 級より、$\forall x \in [a,b]$ において $[a,x]$ で $f$ は連続、
$(a,x)$ で $f$ は微分可能より、平均値の定理から、

$a < c_x < x$ $\quad \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$ となる $c_x$ が存在する。

つまり、$Q(x)=f'(c_x)$ となる $c_x$ が存在する

③ $\int_a^b Q(x)(x-a)\,dx = Q(\alpha)\int_a^b (x-a)\,dx$ となる $\alpha \in [a,b]$ が取れることの証明。

これは 問(19.2) より、$Q(x)$, $x-a$ は区間 $[a,b]$ 上の実数値連続関数であり
$x-a \geqq 0$ であるから、

$\int_a^b Q(x)(x-a)\,dx = Q(\alpha)\int_a^b (x-a)\,dx$ となる $\alpha \in [a,b]$ が存在することがわかる。

①〜③より、

① から、$f(x) = f(a) + Q(x)(x-a)$

これを区間 $[a,b]$ で積分すると、

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a) + \int_a^b Q(x)(x-a)$$

$$= f(a)(b-a) + Q(\alpha)\int_a^b (x-a)\,dx \quad (\because ②)$$

$$= f(a)(b-a) + \frac{Q(\alpha)}{2}(b-a)^2$$

$$\underline{\int_a^b f(x)\,dx = f(a)(b-a) + \frac{f'(c)}{2}(b-a)^2} \quad (\because ③)$$

同様に $f(x) = f(b) + Q(x)(x-b)$ $\quad (\because ①)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(b)\,dx + \int_a^b Q(x)(x-b)\,dx$$

$$= f(b)(b-a) + Q(\beta)\int_a^b (x-b)\,dx \quad (\because ②)$$

$$= f(b)(b-a) - \frac{Q(\beta)}{2}(b-a)^2$$

$$\underline{\int_a^b f(x)\,dx = f(b)(b-a) - \frac{f'(d)}{2}(b-a)^2} \quad (\because ③)$$

No. 4

DATE . .

(2) (1)において $b=x_j$ $a=x_{j-1}$ とすると、

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx = f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}) + \frac{f'(c_j)}{2}(x_j - x_{j-1})^2$$

これを $j=1,\cdots,n$ として辺々足し合わせると、

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^n f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}) + \sum_{j=1}^n \frac{f'(c_j)}{2}(x_j - x_{j-1})^2$$

右辺の第2項目について(これから問(7.10)と同じ証明をする)

区間Iにおける $f'$の最大値を $M$、$f'$の最小値を $m$ とすると、

$$\frac{m}{2}\sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1})^2 \leqq \sum_{j=1}^n \frac{f'(c_j)}{2}(x_j - x_{j-1})^2 \leqq \frac{M}{2}\sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1})^2$$

$$f'_{min} = m \leqq \frac{\sum_{j=1}^n \frac{f'(c_j)}{2}(x_j - x_{j-1})^2}{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1})^2} \leqq M = f'_{max}$$

よって中間値の定理より、

$$a < \xi < b \qquad \sum_{j=1}^n \frac{f'(c_j)}{2}(x_j - x_{j-1})^2 = f'(\xi)\cdot\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1})^2$$

となる $\xi$ が存在する。よって

$$\underline{\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^n f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}) + \frac{f'(\xi)}{2}\sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1})^2}$$

もう一つもまったく同じ方法で解ける。

問(19.4)

(1) $f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{Q(x)}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$ とおく。

① $Q(x)$について整理すると、$x \in [a,b]$, $x \neq \frac{a+b}{2}$ のとき、

$$Q(x) = \frac{2\left\{f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right\}}{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}$$

$f(x)$は $C^1$級より、$f(x)$は連続関数であり、$x - \frac{a+b}{2}$, $\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \geqq 0$ も連続関数なので $Q(x)$も連続。

よって $x = \frac{a+b}{2}$ のとき、$Q(x) = \lim_{x \to \frac{a+b}{2}} \frac{2\left\{f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right\}}{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}$

No.3

ロピタルの定理より、

$$Q(x)=\lim_{x\to\frac{a+b}{2}}\frac{2\left\{f'(x)-f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\}}{2\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}=f''\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

よって

$$Q(x)=\begin{cases}\dfrac{2\left\{f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right\}}{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2} & \left(x\neq\frac{a+b}{2},\ x\in[a,b]\right)\\ f''\left(\frac{a+b}{2}\right) & \left(x=\frac{a+b}{2}\right)\end{cases}$$

とおくと $Q(x)$ は連続関数である。

② $Q(x)=f''(C_x)$ となる $C_x\in[a,b]$ が取れることの証明。

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{Q(x)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$Q(x)=A$ とすると、

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{A}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

両辺を $x$ で微分して

$$f'(x)=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+A\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$$

$\forall x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ において $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ で $f'$ は連続、$\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$ で $f'$ は微分可能。
同様に $\forall x\in\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ 〃 $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ 〃 $\left(\frac{a+b}{2},b\right)$ 〃
より、平均値の定理から、

$$Q(x)=A=\frac{f'(x)-f'\left(\frac{a+b}{2}\right)}{x-\frac{a+b}{2}}=f''(C_x)$$ となる $C_x$ が $a\sim\frac{a+b}{2}$ の間

または $\frac{a+b}{2}\sim b$ の間に存在する。

つまり、$Q(x)=f''(C_x)$ となる $C_x$ が $a\sim b$ の間に存在。

③ 問(19,3)とまったく同じ方法で

$$\int_a^b Q(x)(x-a)\,dx=Q(\alpha)\int_a^b(x-a)\,dx$$ $\alpha\in[a,b]$ が取れる。

(1)

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+Q(x)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx + \int_a^b f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx + \int_a^b \frac{Q(x)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx$$

$$= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{Q(\alpha)}{2}\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx$$

$$= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{Q(\alpha)}{2}\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\right]_a^b$$

$$= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{Q(\alpha)}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{(b-a)^3}{4}$$

$$= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{Q(\alpha)}{24}(b-a)^3$$

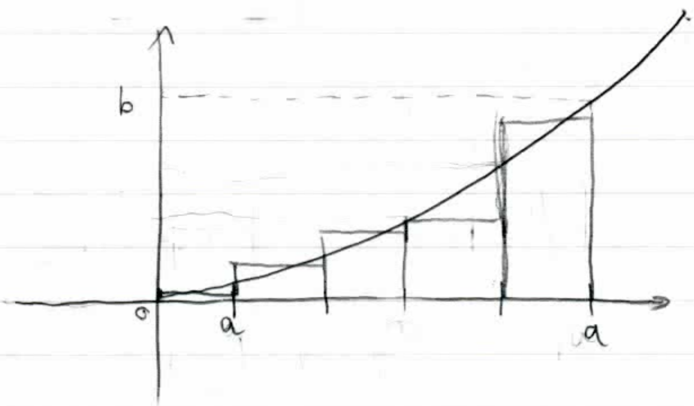
$$\underline{\int_a^b f(x)\,dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{f''(c)}{24}(b-a)^3}$$

(2) 問(19.3)(2)とまったく同じ.

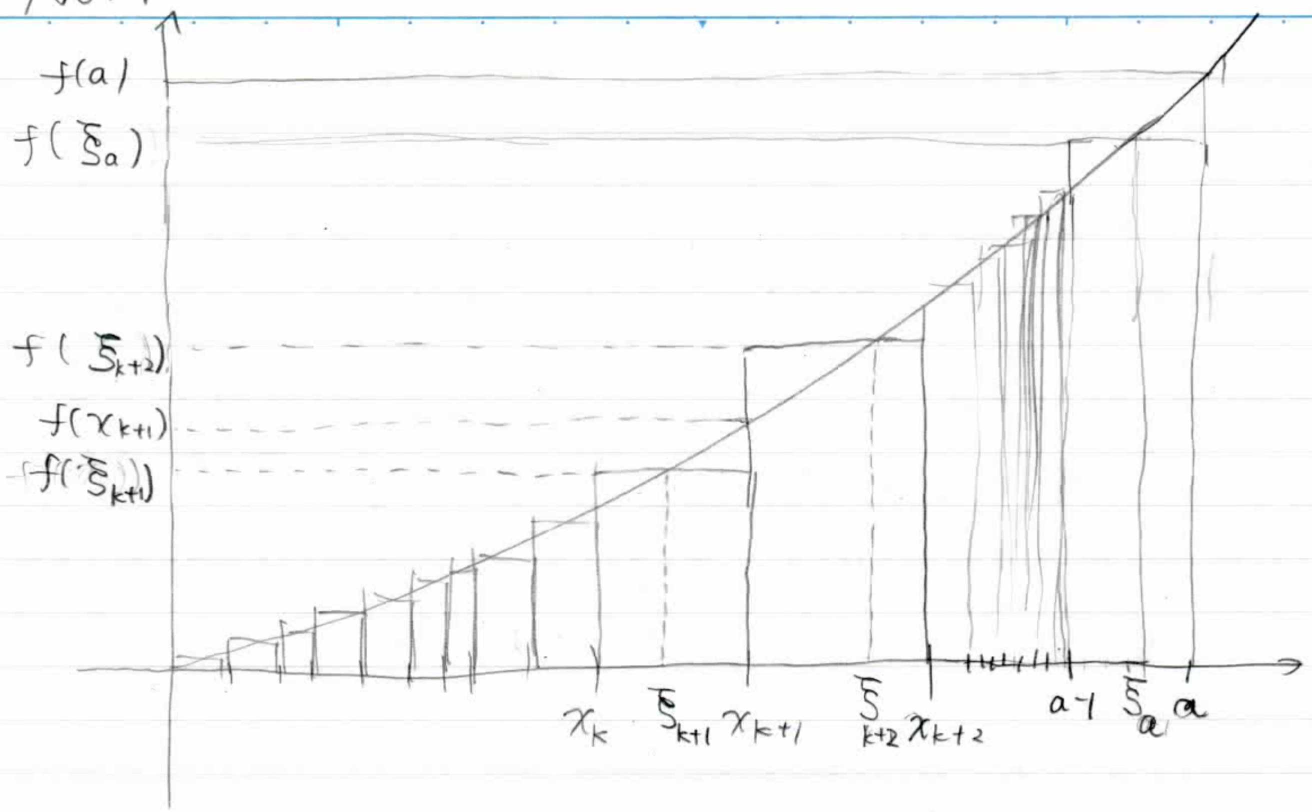
問(19.5)

① $[0, a]$の分割$\Delta$に対して
$s(\Delta; f) + S(\Delta'; f^{-1}) = ab$
となる$[0, b]$の分割$\Delta'$が存在することを示す。 ---(＊)

まず$[0, a]$の分割$\Delta$を任意に選ぶ。
$f$は$[0, a]$上狭義単調増加であるから、$s(\Delta; f)$は下図のようになる.



No. 4




上図のように分割$\Delta$によってできた$[x_k, x_{k+1}]$の代表点を$\xi_{k+1}$とする。
$(*)$をみたすためには上図からわかるように分割$\Delta'[0, b]$を
$\Delta' : 0 = f(0) < f(\xi_1) < f(\xi_2) < \cdots < f(\xi_k) < \cdots < f(\xi_a) < f(a) = b$
として$[f(\xi_k), f(\xi_{k+1})]$の代表点を$f(x_k)$としておればよい。
つまり$(*)$は成り立つ。

② $f$は$[0, a]$上の実数値連続関数であるから、連続の定義より、
$\forall \xi_k, \xi_{k+1} \in [0, a]$において　$\exists \delta > 0, \forall \varepsilon > 0$
$\xi_{k+1} - \xi_k < \delta$ ならば　$f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k) < \varepsilon$ ……(A)
といえる。
ここで $|\Delta_k| \to 0$ $(k \to \infty)$ ということは、
$x_{k+1} - x_k < \frac{\delta}{2}$　$x_k - x_{k-1} < \frac{\delta}{2}$ ということから、
$$\xi_{k+1} - \xi_k < x_{k+1} - x_{k-1} = (x_{k+1} - x_k) + (x_k - x_{k-1}) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$
となり、(A)から $f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k) < \varepsilon$
これはすなわち $|\Delta_k'| \to 0$ $(k \to \infty)$ ということを示している。

これより、①から $S(\Delta; f) + S(\Delta'; f^{-1}) = ab$ がいえて、
②より、$|\Delta| \to 0$ とすると、$|\Delta'| \to 0$ になることから、
$f, f^{-1}$は$[0, a]$上で連続より可積分であることを考慮して

$$\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(y)\,dy = ab$$ がいえる。

問(19.6)

まず(12.3)の定理の証明

$$f\left(\sum_{j=1}^n a_j x_j\right) \leqq \sum_{j=1}^n a_j f(x_j) \quad \cdots (A) \qquad \sum_{j=1}^n a_j = 1$$

$a = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ とする。

凸関数の性質より $f''(x) > 0$

$f(x_j)$ を $a$ の周りで2階テーラー展開すると、

$$f(x_j) = f(a) + f'(a)(x_j - a) + \frac{1}{2} f''(\xi_j)(x_j - a)^2 \geqq f(a) + f'(a)(x_j - a)$$

$(\xi_j = a + \theta_j (x_j - a),\ 0 < \theta_j < 1)$ となる。

$a_j$ を両辺にかけて

$$a_j f(x_j) \geqq a_j f(a) + a_j f'(a)(x_j - a)$$

$j = 1 \sim n$ として辺々足すと、

$$\sum_{j=1}^n a_j f(x_j) \geqq f(a) \sum_{j=1}^n a_j + f'(a)\left(\sum_{j=1}^n a_j x_j - a \cdot \sum_{j=1}^n a_j\right)$$

$\sum_{j=1}^n a_j = 1$ より

$$= f(a) + f'(a)\left(\sum_{j=1}^n a_j x_j - a\right) = f(a)$$

つまり、$\displaystyle \sum_{j=1}^n a_j f(x_j) \geqq f\left(\sum_{j=1}^n a_j x_j\right)$ (Jensenの不等式というらしい)

次に本題。

まず $\varphi\left(\frac{1}{b-a} R(f;\Delta;c)\right) \leqq \frac{1}{b-a} R(\varphi \circ f;\Delta;c)$ を示す。

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a} R(f;\Delta;c)\right) = \varphi\left(\frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^n f(c_k)(x_k - x_{k-1})\right)$$

$$= \varphi\left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k - x_{k-1}}{b-a} f(c_k)\right)$$

ここで $\varphi$ は J上凸であり、$\displaystyle \sum_{k=1}^n \frac{x_k - x_{k-1}}{b-a} = 1$ より、Jensenの不等式から、

$$\leqq \sum_{k=1}^n \frac{x_k - x_{k-1}}{b-a} \varphi(f(c_k)) = \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^n \varphi(f(c_k))(x_k - x_{k-1})$$

# No.5

$$= \frac{1}{b-a} R(\varphi \circ f ; \Delta ; C)$$

$\varphi$ は J上の実数値連続関数
$f$ は $[a,b]$ 上の 〃 であるから、$\varphi \circ f$, $f$ はリーマン積分可能

よって 定積分の定義から、$|\Delta| \to 0$ のとき

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a} R(f ; \Delta ; C)\right) \longrightarrow \varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)$$

$$\frac{1}{b-a} R(\varphi \circ f ; \Delta ; C) \longrightarrow \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi \circ f(x)dx$$

つまり、 $\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))dx$

問(19.7)

(1) $t \in E$, $s \in (1, +\infty)$ とする。

$J = (0, +\infty)$ 上の凸関数 $\varphi_s(y) = y^s$ と $[0,1]$ 上の関数 $f(x)^t$ に対して

$t > 0$ のとき $0 < t < ts$ より、

$$g(ts) - g(t) = \left\{\int_0^1 f(x)^{ts}dx\right\}^{\frac{1}{ts}} - \left\{\int_0^1 f(x)^t dx\right\}^{\frac{1}{t}}$$

$$= \left\{\int_0^1 f(x)^{ts}dx\right\}^{\frac{1}{ts}} - \left[\left\{\int_0^1 f(x)^t dx\right\}^s\right]^{\frac{1}{ts}}$$

ここで 問(19.6)の結果より

$$\geqq \left\{\int_0^1 f(x)^{ts}dx\right\}^{\frac{1}{ts}} - \left[\int_0^1 f(x)^{ts}dx\right]^{\frac{1}{ts}}$$

$$= 0$$

よって $g(ts) \geqq g(t)$ $(ts > t)$

つまり、 $g$ は $t > 0$ で広義単調増加

$t < 0$ のとき $ts < t < 0$ より、

$$g(t) - g(ts) = \left\{\int_0^1 f(x)^t dx\right\}^{\frac{1}{t}} - \left\{\int_0^1 f(x)^{ts}dx\right\}^{\frac{1}{ts}}$$

$$= \frac{1}{\left\{\int_0^1 f(x)^t dx\right\}^{-\frac{1}{t}}} - \frac{1}{\left\{\int_0^1 f(x)^{ts}dx\right\}^{-\frac{1}{ts}}}$$

$$= \frac{1}{\left[\left\{\int_0^1 f(x)^t dx\right\}^s\right]^{-\frac{1}{ts}}} - \frac{1}{\left\{\int_0^1 f(x)^{ts}dx\right\}^{-\frac{1}{ts}}}$$

ここで $\left\{\int_0^1 f(x)^t dx\right\}^s \leqq \int_0^1 f(x)^{ts} dx$ より，

$$\frac{1}{\int_0^1 f(x)^{ts} dx} \leqq \frac{1}{\left\{\int_0^1 f(x)^t dx\right\}^s}$$

つまり $g(t)-g(ts) \geqq \dfrac{1}{\left\{\int_0^1 f(x)^{ts} dx\right\}^{-\frac{1}{ts}}} - \dfrac{1}{\left\{\int_0^1 f(x)^{ts} dx\right\}^{-\frac{1}{ts}}} = 0$

$g(t) \geqq g(ts) \quad (t > ts)$

よって $g$ は $t<0$ で広義単調増加，

つまり，関数 $g(t)$ は $(-\infty, 0)$ 上でも $(0, +\infty)$ でも広義単調増加

(2) (i) $g(t) \leqq \max f([0,1]) = f(c)$ $c \in [0,1]$ を示す，

$g(t) = \left(\int_0^1 f(x)^t dx\right)^{\frac{1}{t}}$

$t>0$ より，$y = \int_0^1 f(x)^t dx$ とおくと，$y>0$ であるから $y^{\frac{1}{t}}$ は凸関数。

だから 問(19.6)の結果より，

$$g(t) = \left(\int_0^1 f(x)^t dx\right)^{\frac{1}{t}} \leqq \int_0^1 \{f(x)^t\}^{\frac{1}{t}} dx = \int_0^1 f(x) dx$$

$$\leqq \int_0^1 \max f([0,1])\, dx = \int_0^1 f(c) dx = f(c)$$

よって $g(t) \leqq f(c)$

(ii) $g(t) \leqq f(c)$，つまり，$g(t)$ は有界であり，また(1)より $g(t)$ は広義単調増加であるから $g(t)$ は収束する，その極限を A とあらわす。

$u$ を $\forall u \in [0, f(c))$ をみたす実数とする，$0 \leqq \alpha \leqq c \leqq \beta \leqq 1$ かつ $\alpha < \beta$ かつ $u < f(x)$ $(x \in [\alpha, \beta])$ である実数 $\alpha, \beta$ が取れることを示す，

$f(x)$ は連続な関数より，

$\varepsilon = f(c) - u > 0$ とすると $^\exists\delta > 0$ が存在して $|c-x| < \delta$ で

$|f(c) - f(x)| < f(c) - u$

$f(c) - f(x) < f(c) - u$

$f(x) > u \quad (|c-x| < \delta)$

つまり，$c-\delta < \alpha < c < \beta < c+\delta$ と $\alpha, \beta$ を取ってやると，

$f(x) > u \ (x \in [\alpha, \beta])$ がいえる，

# No. 6

(iii) $0 < u < f(x)$ $(x \in [\alpha, \beta])$ より、$0 < u^t < f(x)^t$ $(x \in [\alpha, \beta])$ であるが
$\alpha$ から $\beta$ の範囲で両辺を積分すると、

$$0 < \int_\alpha^\beta u^t dx < \int_\alpha^\beta f(x)^t dx$$

$$\left(\int_\alpha^\beta u^t dx\right)^{\frac{1}{t}} < \left(\int_\alpha^\beta f(x)^t dx\right)^{\frac{1}{t}} = g(t) \leqq f(c)$$

つまり $\left(\int_\alpha^\beta u^t dx\right)^{\frac{1}{t}} < g(t) \leqq f(c)$ ---①

ここで $\left(\int_\alpha^\beta u^t dx\right)^{\frac{1}{t}} = \left(u^t(\beta-\alpha)\right)^{\frac{1}{t}} = u(\beta-\alpha)^{\frac{1}{t}} \xrightarrow[t\to\infty]{} u$

つまり ①において $t \to \infty$ の極限をとると、

$u < \lim_{t\to\infty} g(t) \leqq f(c)$ となる。

$u$ は (ii) より、$u \in (0, f(c))$ の任意の値であるから、$u \to f(c)$ としてやると、$\lim_{t\to\infty} g(t) = f(c)$ （$g(t)$ の極限Aが存在することは(iii)の冒頭で証明済み）

つまり、$g(t) \to \max f([0,1])$ $(t \to +\infty)$

(3) (2)と同じ方法。
でもみた感じ、(1)と同じようにまったく同じというわけではなさそうなので、解いていて何か問題があったらシケタイにいってください。
そのときは頑張って解きます ^^

問(19.8)

(1) $a \leqq \alpha < \beta$ とする。

$$F(\beta) - F(\alpha) = \int_a^\beta \frac{1}{f(t)} dt - \int_a^\alpha \frac{1}{f(t)} dt = \int_\alpha^\beta \frac{1}{f(t)} dt$$

$\frac{1}{f(t)} > 0$ より、$F(\beta) - F(\alpha) > 0$ 　$F(\beta) > F(\alpha)$

$F$ は $[a, +\infty)$ 上狭義単調増加。

また $f(t) > 0$ で $\frac{1}{f(t)}$ は連続だから $F(x) = \int_a^x \frac{1}{f(t)} dt$ も連続。

→これじゃ駄目な気がするけど・・

次に $F([a, +\infty)) = [0, +\infty)$ を示す。

これは、$F(a) = 0$ 　$\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$ がいえれば $F$ は狭義単調増加であることから題意を示せる。

$F(a) = 0$ は自明。