No 12

DATE

$\lim_{x\to\infty} F(x)$ について、

f は狭義単調減少より、

$0 < f(x) \leqq f(0) \quad (x \in [a, +\infty])$

$0 < \dfrac{1}{f(0)} \leqq \dfrac{1}{f(x)}$

これを $a \sim x$ まで積分すると、

$$\int_a^x \frac{1}{f(0)} dx \leqq \int_a^x \frac{1}{f(x)} dx$$

$x \to +\infty$ とすると、(左辺) $\longrightarrow \infty$ となるから、

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$$

よって $F([a, +\infty)) = [0, +\infty)$

(2) $a_{n+1} = a_n + f(a_n)$

$$\frac{1}{f(a_n)}(a_{n+1} - a_n) = 1$$

よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(a_k)}(a_{k+1} - a_k) = n$

① $a_n \leqq x \leqq a_{n+1}$

f は狭義単調減少より、 $f(a_{n+1}) \leqq f(x) \leqq f(a_n)$

よって $\dfrac{1}{f(a_n)} \leqq \dfrac{1}{f(x)}$

② $\dfrac{1}{f(x-C)} \leqq \dfrac{1}{f(a_n)}$ を示すには $a_n \geqq x - C$ を示したい。

$a_n - (x - C) = a_n - x + C = a_n - x + f(a)$

$> a_n - a_{n+1} + f(a)$

$= f(a) - f(a_n)$

ここで $a_n = a_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f(a_k) > a_1$ つまり $a_n > a_1$

$\uparrow$

$f(a_k)$

f は狭義単調減少より $f(a_n) < f(a_1)$

よって $a_n - (x - C) > 0$

$a_n > x - C$

これより $\dfrac{1}{f(x-C)} \leqq \dfrac{1}{f(a_n)}$

$F^{-1}(n) \leqq a_{n+1} \leqq f(a) + F^{-1}(n-1)$ を示す。

①より $\dfrac{1}{f(a_k)} \leqq \dfrac{1}{f(x)}$

No, 7

両辺を $a_k \sim a_{k+1}$ まで x で積分して、

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{1}{f(a_k)}dx \leqq \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{1}{f(x)}dx$$

$$\frac{a_{k+1}-a_k}{f(a_k)} \leqq \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{dx}{f(x)}$$

$k=1,\cdots,n$ まで辺々足し合わせると、

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}-a_k}{f(a_k)} \leqq \int_{a}^{a_{n+1}} \frac{dx}{f(x)}$$

$$n \leqq F(a_{n+1})$$

F は狭義単調増加であるから $F(x)=n$ であるためには

$x \leqq a_{n+1}$ でなければならない。

よって $F^{-1}(n) \leqq a_{n+1}$

次に ② より、 $\dfrac{1}{f(x-c)} \leqq \dfrac{1}{f(a_k)}$

同様に $a_k \sim a_{k+1}$ まで x で積分して

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{1}{f(x-c)}dx \leqq \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{1}{f(a_k)}dx$$

$k=2,\cdots,n$ まで辺々足し合わせると、

$$\int_{a_2}^{a_{n+1}} \frac{1}{f(x-c)}dx \leqq n-1$$

$x-c=t$ とおくと、

$$(左辺) = \int_{a_2-c}^{a_{n+1}-c} \frac{dt}{f(t)} \leqq n-1$$

$a_2-c=a_1 \qquad a_{n+1}-c = a_{n+1}-f(a)$

よって $$\int_{a_1}^{a_{n+1}-f(a)} \frac{dt}{f(t)} \leqq n-1$$

$$F(a_{n+1}-f(a)) \leqq n-1$$

F は狭義単調増加であるから $F(x)=n-1$ であるためには、

$x \geqq a_{n+1}-f(a)$ でなければならない。

よって $F^{-1}(n-1) \geqq a_{n+1}-f(a)$

$$a_{n+1} \leqq F^{-1}(n-1)+f(a)$$

つまり、 $\underline{F^{-1}(n) \leqq a_{n+1} \leqq F^{-1}(n-1)+f(a)}$

(3) $F^{-1}(n)$, $F^{-1}(n-1)$ を求める。

$$n=\int_a^x t^\alpha dt = \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_a^x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

$$n(\alpha+1) = x^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}$$

$$x^{\alpha+1} = a^{\alpha+1} + (\alpha+1)n$$

$$F^{-1}(n) = x = \left(a^{\alpha+1} + (\alpha+1)n\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}$$

$F^{-1}(n-1)$ は $F^{-1}(n)$ の n を $n-1$ におきかえたものより、

$$F^{-1}(n-1) = \left(a^{\alpha+1} + (\alpha+1)(n-1)\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}$$

これを(2)の式に代入すると、

$$\left(a^{\alpha+1} + (\alpha+1)n\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \leq a_{n+1} \leq \left(\frac{1}{a}\right)^{\alpha} + \left(a^{\alpha+1} + (\alpha+1)(n-1)\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}$$

問(19.9)

$s(\Delta;\lambda f) = \lambda s(\Delta;f)$ $(\lambda > 0)$ を示す。

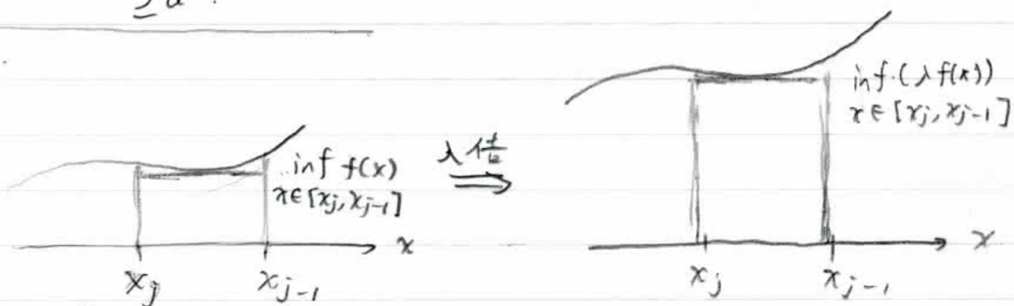
$$s(\Delta;\lambda f) = \sum_{j=1}^{m} \left\{ \inf_{x\in[x_j,x_{j-1}]} (\lambda f(x))(x_j - x_{j-1}) \right\}$$ (∵ $\inf(\lambda S) = \lambda \inf S$)

$$= \lambda \sum_{j=1}^{m} \inf_{x\in[x_j,x_{j-1}]} (f(x))(x_j - x_{j-1}) \} = \lambda s[\Delta;f]$$

これらの上限をとると、

$$\underline{\int_a^b} \lambda f(x)\,dx = \lambda \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

状況的には下図



次に $s(\Delta;\lambda f) = \lambda S(\Delta;f)$ $(\lambda < 0)$ を示す。

$$s(\Delta;\lambda f) = \sum_{j=1}^{m} \left\{ \inf_{x\in[x_j,x_{j-1}]} (\lambda f(x))(x_j - x_{j-1}) \right\}$$

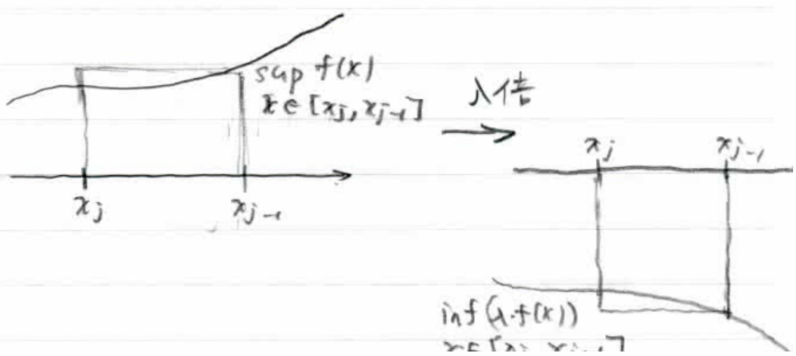
$$= \lambda \sum_{j=1}^{m} \left\{ \sup_{x\in[x_j,x_{j-1}]} (f(x))(x_j - x_{j-1}) \right\}$$ (∵ $\inf(\lambda S) = \lambda \sup S$)

$$= \lambda S(\Delta;f)$$

これらの上限をとると、

$$\underline{\int_a^b} \lambda f(x)\,dx = \lambda \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

状況的には右図



No.8

問(19.10)

(1) $f(x) \leqq g(x)$ $(x \in [a,b])$より、

$\inf f(x) \leqq f(x) \leqq g(x)$ が任意の x について成り立つ。

つまり、 $\inf f(x) \leqq \inf g(x)$

$\inf f(J) \leqq \inf g(J)$ $(J \in \mathcal{J}([a,b]))$

よって (19.3.2)より

$$\inf f(J) \leqq \Phi(J) = \underline{\int_J} g \Rightarrow \inf f(J)|J| \leqq \underline{\int_J} g$$

[a,b]の分割Δ: $a = x_0 = x_1 = \cdots = x_n = b$ とすると、

$$\sum_{i=1}^{n} \inf f_i(J)|J| \leqq \sum_{i=1}^{n} \underline{\int_J} g_i$$

これより、(19.9.2)(イ)より $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$ とすると、

$$\sum_{i=1}^{n} \inf f_i(J)|J| \leqq \sum_{i=1}^{n} \underline{\int_J} g_i$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \underline{\int_J} f_i \leqq \sum_{i=1}^{n} \underline{\int_J} g_i$$

$$\Longleftrightarrow \underline{\int_a^b} f \leqq \underline{\int_a^b} g$$

(後半) $f(x) \leqq g(x)$

$f(x) \leqq \sup g(x)$ が任意の x について成り立つ

つまり、 $\sup f(x) \leqq \sup g(x)$

$\sup f(J) \leqq \sup g(J)$ $(J \in \mathcal{J}([a,b]))$

$\Phi(J) = \underline{\int_J} f$ $(f \in \mathcal{J}([a,b]))$ とすると、

$$\overline{\int_J} f \leqq \sup f(J) \leqq \sup g(J)$$

よって $\overline{\int_J} f \leqq \sup g(J)|J|$

[a,b]の分割Δ: $a = x_0 = x_1 = \cdots = x_n = b$ とすると (19

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\int_J} f \leqq \sum_{i=1}^{n} \sup g_i(J)|J|$$

(19.9.2)(ロ)より

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\int_J} f \leqq \sum_{i=1}^{n} \overline{\int_J} g$$

つまり $\overline{\int_a^b} f \leqq \overline{\int_a^b} g$

(2) $-|f(x)| \leqq f(x) \leqq |f(x)|$

$$\underline{\int}_a^b -|f(x)| \leqq \underline{\int}_a^b f(x) \leqq \underline{\int}_a^b |f(x)|$$

ここで、定理(19.7)(1)より、

$$\underline{\int}_a^b -|f(x)| = -\overline{\int}_a^b |f(x)|$$

また、定義より、

$$\underline{\int}_a^b |f(x)| \leqq \overline{\int}_a^b |f(x)|$$

よって $-\overline{\int}_a^b |f(x)| \leqq \underline{\int}_a^b f(x) \leqq \overline{\int}_a^b |f(x)|$

$$\Longleftrightarrow \quad \left| \underline{\int}_a^b f(x) \right| \leqq \overline{\int}_a^b |f(x)|$$

(後半もまったく同様)

(19.11) $\inf f(x) \leqq f(x)$

$\inf g(x) \leqq g(x)$

両辺を足すと

$\inf f(x) + \inf g(x) \leqq f(x) + g(x)$ が任意の $x \in [a,b]$ において成り立つ。

よって $\inf f(J) + \inf g(J) \leqq \inf (f+g)(J)$

$\Phi(J) = \underline{\int}_J (f+g)$ とすると、p163 (19.3.2) より、

$$\inf f(J) + \inf g(J) \leqq \inf (f+g)(J) \leqq \underline{\int}_J (f+g) \quad (J \in \mathcal{J}([a,b]))$$

よって $\inf f(J)|J| + \inf g(J)|J| \leqq \underline{\int}_J (f+g)$

分割 Δ: $a = x_0 < x_1 < \cdots\cdots < x_n = b$ とすると、

$$\sum_{i=1}^n \inf f_i(J)|J| + \sum_{i=1}^n \inf g_i(J)|J| \leqq \sum_{i=1}^n \underline{\int}_J (f_i + g_i)$$

よって (19.9.2)(イ) より、

$$\sum_{i=1}^n \underline{\int}_J f_i + \sum_{i=1}^n \underline{\int}_J g_i \leqq \sum_{i=1}^n \underline{\int}_J (f_i + g_i)$$

つまり、 $\underline{\int}_a^b f + \underline{\int}_a^b g \leqq \underline{\int}_a^b (f+g)$

両辺に $\lambda = -1$ をかけると (19.7)(1) より、

$$-\underline{\int}_a^b f - \underline{\int}_a^b g \geqq -\underline{\int}_a^b (f+g)$$

No.9

$$\overline{\int_a^b}(-f)-\overline{\int_a^b}(-g)\geqq\overline{\int_a^b}(-f-g)$$

$-f=f'$　$-g=g'$とすると、

$$\overline{\int_a^b}f'+\overline{\int_a^b}g'\geqq\overline{\int_a^b}(f'+g')$$

つまり　$\overline{\int_a^b}(f+g)\leqq\overline{\int_a^b}f+\overline{\int_a^b}g$

問(19,12)

$\sup\varphi(f(J))-\inf\varphi(f(J))=\sup\{|y-z|\,;\,y,z\in\varphi(f(J))\}$

より、

$$\begin{aligned}\sup\varphi(f(J))-\inf\varphi(f(J))&=\sup(\varphi(f(u))-\varphi(f(v)))\quad(u,v\in E)\\&\leqq\sup(L|f(u)-f(v)|)\quad(\text{仮 }\varphi\text{についての仮定})\\&=L(\sup f(J)-\inf f(J))\quad(J\in\mathscr{D}([a,b]))\end{aligned}$$

$\Phi(J)=\overline{\int_J}\varphi\circ f-\underline{\int_J}\varphi\circ f$ とすると、

$$\begin{aligned}L(\sup f(J)-\inf f(J))&=\sup\varphi(f(J))-\inf\varphi(f(J))\\&\geqq\overline{\int_J}\varphi\circ f-\underline{\int_J}\varphi\circ f=\Phi(J)\ (\because(19,3,2))\end{aligned}$$

$[a,b]$の分割 $\Delta : a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ とすると、

$$\sum_{i=1}^n L(\sup f_i(J)-\inf f_i(J))\geqq\sum_{i=1}^n\overline{\int_J}\varphi\circ f-\sum_{i=1}^n\underline{\int_J}\varphi\circ f$$

よって (19,9,2)(2)(ロ)より、

$$L\left(\sum_{i=1}^n\overline{\int_J}f_i-\sum_{i=1}^n\underline{\int_J}f_i\right)\geqq\sum_{i=1}^n\overline{\int_J}\varphi\circ f-\sum_{i=1}^n\underline{\int_J}\varphi\circ f$$

よって　$\overline{\int_a^b}\varphi\circ f-\underline{\int_a^b}\varphi\circ f\leqq L\left(\overline{\int_a^b}f-\underline{\int_a^b}f\right)$

---

(2) fは$[a,b]$上積分可能

$$\Longleftrightarrow\overline{\int_a^b}f-\underline{\int_a^b}f=0$$

よって(1)より、

$$0\leqq\overline{\int_a^b}\varphi\circ f-\underline{\int_a^b}\varphi\circ f\leqq L\cdot 0=0$$

つまり、$\overline{\int_a^b}\varphi\circ f-\underline{\int_a^b}\varphi\circ f=0\Longleftrightarrow\varphi\circ f$は$[a,b]$上積分可能。

No. Date

(3) $\varphi = |f(x)|$ とすると、

$$||u| - |v|| \leqq |u - v|$$

が成り立つ。

これは問題文の仮定において $L=1$ とした式と同じである。

よって (1) と (2) を満たす。

つまり、f が $[a,b]$ 上積分可能 $\Rightarrow$ $|f|$ は $[a,b]$ 上積分可能。

(4) $m = \inf_{x\in[a,b]} |f(x)|$ とすると、$m>0$, $E = \{ y \in \mathbb{R} ; |y| \geqq m \}$, $\varphi(y) = \dfrac{1}{y}$

$L = \dfrac{1}{m^2}$ とすると、

$u>v$ と仮定

$$\left|\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right| - \frac{1}{m^2}|u-v| = \frac{1}{v} - \frac{1}{u} - \frac{1}{m^2}(u-v) = \frac{u-v}{uv} - \frac{1}{m^2}(u-v)$$

$$= \frac{(m^2 - uv)(u-v)}{m^2uv}$$

$|y| \leqq m$ より $|u| \geqq m$, $|v| \leqq m$

つまり $m^2 - |uv| \leqq 0$

u と v が同符号のとき $m^2 - uv \leqq 0$ $uv \geqq 0$ より、

$$\left|\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right| \leqq \frac{1}{m^2}|u-v|$$

u と v が異符号のとき $m^2 - uv \geqq 0$ $uv \leqq 0$ より、

$$\left|\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right| \leqq \frac{1}{m^2}|u-v|$$

これは問題文の仮定において $L = \dfrac{1}{m^2} > 0$ としたものより、(1) と (2) をみたす。

つまり、f が $[a,b]$ 上積分可能 $\Rightarrow$ $1/f$ も $[a,b]$ 上積分可能。

問(19.13)

f は c で連続より、$|x-c| < \delta$ で

$$|f(x) - f(c)| < \frac{f(c)}{2}$$

つまり、$f(x) > \dfrac{f(c)}{2}$

$a \leqq c-\delta \leqq a' \leqq c \leqq b' \leqq c+\delta \leqq b$ となる a', b' をとると、

Date . . No.

No. 10

$$f(x) > \frac{f(c)}{2} \quad (a' \leqq x \leqq b' \text{ かつ } a' \neq b') \text{ より、}$$

$$\int_{a'}^{b'} f(x) > \frac{f(c)}{2}(b' - a')$$

また、$f(x) \geqq 0 \ (x \in [a, b])$ より、

$$\int_a^b f(x) \geqq \underbrace{\int_a^{a'} f(x)}_{\geqq 0} + \int_{a'}^{b'} f(x) + \underbrace{\int_{b'}^{b} f(x)}_{\geqq 0} \geqq \int_{a'}^{b'} f(x) > \frac{f(c)}{2}(b' - a') > 0$$

よって $\underline{\int_a^b f(x) > 0}$

問(19, 14)

(1) (19.3.2) より、

$$\overline{\int_a^c} f - \underline{\int_a^c} f \leqq M(c-a) - m(c-a) = (M-m)(c-a)$$

$$\overline{\int_d^b} f - \underline{\int_d^b} f \leqq M(b-d) - m(b-d) = (M-m)(b-d)$$

(2) ($\Leftarrow$)

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = \left(\overline{\int_a^c} f - \underline{\int_a^c} f\right) + \underbrace{\left(\overline{\int_c^d} f - \underline{\int_c^d} f\right)}_{=0} + \left(\overline{\int_d^b} f - \underline{\int_d^b} f\right)$$

$$= \left(\overline{\int_a^c} f - \underline{\int_a^c} f\right) + \left(\overline{\int_d^b} f - \underline{\int_d^b} f\right)$$

$$\leqq (M-m)(c-a) + (M-m)(b-d) \quad (\because (1) \text{ より})$$

$a < c < d < b$ をみたす任意の $c, d \in \mathbb{R}$ に対して、f は $[c, d]$ 上積分可能より

$c - a < \dfrac{1}{M-m} \cdot \dfrac{\varepsilon}{2}$ 　 $b - d < \dfrac{1}{M-m} \cdot \dfrac{\varepsilon}{2}$ となる c, d をとると、

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

つまり、f は $[a, b]$ 上積分可能。

($\Rightarrow$) 当然です! (19.5.2) 参照 証明は P170.

(3) $S \cup \{a, b\}$ に属すすべての元を小さいものから順に並べたものを

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ とする $[x_{j-1}, x_j]$ 上において

$x_{j-1} < c < d < b$ に属す c, d はどの点においても連続であるから積分可能.

よって (2) より f は $[x_{j-1}, x_j]$ 上積分可能。$(j = 1, \cdots, n)$

No. Date

よって f は $[x_0, x_1]$; $[x_1, x_2]$ ---- ; $[x_{n-1}, x_n]$ で積分可能より
$[a, b]$ 上で積分可能.

問(19.15)

$[a,b]$ の分割 Δ : $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ とする.

$[x_{j-1}, x_j]$ において, f は $[a,b]$ 上広義単調増加だから

$$\sup_{x\in I_j} f(x) - \inf_{x\in I_j} f(x) = f(x_j) - f(x_{j-1})$$

$$\left(\sup_{x\in I_j} f(x) - \inf_{x\in I_j} f(x)\right)(x_j - x_{j-1}) = \left(f(x_j) - f(x_{j-1})\right)(x_j - x_{j-1})$$

$$\leqq \left(f(x_j) - f(x_{j-1})\right)|\Delta|$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sup_{x\in I_j} f(x) - \inf_{x\in I_j} f(x)\right)(x_j - x_{j-1}) \leqq \sum_{j=1}^{n}\left(f(x_j) - f(x_{j-1})\right)|\Delta|$$

$$\underline{S(\Delta; f) - s(\Delta; f) \leqq \left(f(b) - f(a)\right)|\Delta|}$$

(2) $f(a) = f(b)$ のとき,

$f(x)$ は $[a,b]$ 上広義単調増加より, $f(a) \leqq f(x) \leqq f(b)$

であるから $f(x) = f(a) =$ 定数 $(\forall x \in [a,b])$

よって積分可能.

$f(a) \neq f(b)$ のとき

(1) より,

$$S(\Delta; f) - s(\Delta; f) \leqq \left(f(b) - f(a)\right)|\Delta|$$

が任意の分割 Δ で成り立つことから,

$|\Delta| < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ とすると,

$$S(\Delta; f) - s(\Delta; f) \leqq \left(f(b) - f(a)\right)|\Delta| < \varepsilon$$

$\Delta \to 0$ では

$S(\Delta; f) = \overline{\int_a^b} f$ $\quad s(\Delta; f) = \underline{\int_a^b} f$ より,

$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$ が成り立つ.

つまり, f は $[a,b]$ 上積分可能.

No. 11

問(19.16)

(1) $\sup\varphi(E)-\inf\varphi(E)=\sup\{|y-z|\,;\,y,z\in\varphi(E)\}$

$$\sup\varphi(E)-\inf\varphi(E)=\sup\{\varphi(u_1,u_2)-\varphi(v_1,v_2)\}$$
$$\leqq\sup\{L_1|u_1-v_1|+L_2|u_2-v_2|\}$$
$$\leqq L_1(\sup f(x)-\inf f(x))+L_2(\sup g(x)-\inf g(x))$$

$\Phi(J)=\overline{\int_J}h-\underline{\int_J}h$ とすると、

$$L_1(\sup f(x)-\inf f(x))+L_2(\sup g(x)-\inf g(x))$$
$$=\sup\varphi(E)-\inf\varphi(E)$$
$$\geqq\overline{\int_J}h-\underline{\int_J}h=\Phi(J)\qquad(\because(19.3.2))$$

$[a,b]$ の分割：Δ；$a=x_0<x_1<\cdots\cdots<x_n$ とすると、

$$\sum_{i=1}^{n}\{L_1(\sup f_i(x)-\inf f_i(x))+L_2(\sup g_i(x)-\inf g_i(x))\}$$
$$\geqq\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{\int_J}h-\underline{\int_J}h\right)$$

よって (19.9.2)(b)より、

$$L_1\left(\overline{\int_a^b}f-\underline{\int_a^b}f\right)+L_2\left(\overline{\int_a^b}g-\underline{\int_a^b}g\right)\geqq\overline{\int_a^b}h-\underline{\int_a^b}h$$

(2) f,g は $[a,b]$ 上積分可能

$$\Longleftrightarrow\overline{\int_a^b}f=\underline{\int_a^b}f\qquad\overline{\int_a^b}g=\underline{\int_a^b}g$$

よって (1)より $\quad 0+0\geqq\overline{\int_a^b}h-\underline{\int_a^b}h\geqq0$

よって $\overline{\int_a^b}h-\underline{\int_a^b}h=0\Longleftrightarrow h$ は $[a,b]$ 上積分可能。

(3) $\varphi(y,z)=\min\{y,z\}$ 　$L_1=L_2=1$ とすると、

問(1.6)より、

$$|\min\{y_1,z_1\}-\min\{y_2,z_2\}|\leqq\max\{|y_1-y_2|,|z_1-z_2|\}$$

が成り立つから、

$$|\varphi(y_1,z_1)-\varphi(y_2,z_2)|=|\min\{y_1,z_1\}-\min\{y_2,z_2\}|$$
$$\leqq\max\{|y_1-y_2|,|z_1-z_2|\}$$
$$\leqq|y_1-y_2|+|z_1-z_2|$$

よって $|\varphi(y_1,z_1)-\varphi(y_2,z_2)|\leqq|y_1-y_2|+|z_1-z_2|$ が成りたつことより

No. Date

(1) と (2) が成り立つから、

f, g が $[a,b]$ 上積分可能 $\Longrightarrow$ $\min\{f,g\}$ も積分可能。

次に $\max\{f,g\}$ について、

問 (1,6) の結果より、

$|\max\{y_1,z_1\} - \max\{y_2,z_2\}| \leqq \max\{|y_1-y_2|, |z_1-z_2|\}$ を使う。

以下、まったく同様。

最後に $f \cdot g$ について

$\varphi(y,z) = yz$ $\quad L_1 = \sup\limits_{x\in[a,b]} |g(x)|$ $\quad L_2 = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ とすると、

$$
\begin{aligned}
|\varphi(y_1,z_1) - \varphi(y_2,z_2)| &= |y_1 z_1 - y_2 z_2| \\
&= |y_1 z_1 - y_1 z_2 + y_1 z_2 - y_2 z_2| \\
&\leqq |y_1 z_1 - y_1 z_2| + |y_1 z_2 - y_2 z_2| \\
&= |y_1||z_1 - z_2| + |z_2||y_1 - y_2| \\
&\leqq \sup_{x\in[a,b]} |y||z_1 - z_2| + \sup_{x\in[a,b]} |z||y_1 - y_2|
\end{aligned}
$$

つまり、これは、

$|\varphi(y_1,z_1) - \varphi(y_2,z_2)| \leqq L_1|y_1 - y_2| + L_2|z_1 - z_2|$ が成り立っていること

であり、これより (1) と (2) が成り立つから、

f, g が積分可能 $\Longrightarrow$ fg が積分可能。

問 (19, 17)

$$\sup h(J) - \inf h(J) \leqq w(t;\varphi) + \frac{M-m}{t}(\sup f(J) - \inf f(J) + \sup g(J) - \inf g(J))$$

が成り立つことを証明する。

$\sup f(J) - \inf f(J) < t$ かつ $\sup g(J) - \inf g(J) < t$ のとき、

$$\sup h(J) - \inf h(J) \leqq w(t;\varphi) \leqq w(t;\varphi) + \frac{M-m}{t}(\sup f(J) - \inf f(J) + \sup g(J) - \inf g(J))$$

$\sup f(J) - \inf f(J) \geqq t$ または $\sup g(J) - \inf g(J) \geqq t$ のとき

$$
\begin{aligned}
\sup h(J) - \inf h(J) \leqq M - m &\leqq \frac{M-m}{t}(\sup f(J) - \inf f(J) + \sup g(J) - \inf g(J)) \\
&\leqq w(t;\varphi) + \frac{M-m}{t}(\sup f(J) - \inf f(J) + \sup g(J) - \inf g(J))
\end{aligned}
$$

いずれにせよ成り立つ。

$\Phi(J) = \overline{\int_J} h - \underline{\int_J} h$ とすると、

Date . . No.

No. 12

$$\left\{ w(t;\varphi) + \frac{M-m}{t}\left(\sup f(J) - \inf f(J) + \sup g(J) - \inf g(J)\right)\right\}|J| \geqq \{\sup h(J) - \inf h(J)\}|J|$$

$$\geqq \overline{\int_J} h - \underline{\int_J} h = \Phi(J) \qquad (\because (19.3.2))$$

が任意の $J \in \mathcal{l}([a,b])$ に対して成り立つ。

(19.9.2)(2)(ロ) より これは、

$$w(t;\varphi)|J| + \frac{M-m}{t}\left(\overline{\int_J} f - \underline{\int_J} f + \overline{\int_J} g - \underline{\int_J} g\right) \geqq \Phi(J)$$

$[a,b]$ の分割; $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ とすると、

$$\sum_{i=1}^{n} w(t;\varphi)|J_i| + \frac{M-m}{t}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{\int_{J_i}} f - \underline{\int_{J_i}} f + \overline{\int_{J_i}} g - \underline{\int_{J_i}} g\right) \geqq \sum_{i=1}^{n}\left(\overline{\int_{J_i}} h - \underline{\int_{J_i}} h\right)$$

つまり、

$$w(t;\varphi)(b-a) + \frac{M-m}{t}\left(\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g - \underline{\int_a^b} g\right) \geqq \overline{\int_a^b} h - \underline{\int_a^b} h$$

(2) f, g が $[a,b]$ 上積分可能

$$\Longleftrightarrow \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f \qquad \overline{\int_a^b} g = \underline{\int_a^b} g$$

また、φ は K 上一様連続 より、$w(t;\varphi) \to 0 \quad (t \to +0)$

つまり、$t \to 0$ として分割の幅を小さくすると、

$$0 \leqq \overline{\int_a^b} h - \underline{\int_a^b} h \leqq 0 + \frac{M-m}{t}(0+0) = 0$$

よって $\overline{\int_a^b} h = \underline{\int_a^b} h \Longleftrightarrow h$ も $[a,b]$ 上積分可能