[4]

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \geq \int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{x}dx = \lim_{n\to\infty}\log n = \infty$

より $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ は発散する.

$f(x) = x - \log x$ とおくと　$f'(x) = 1-\frac{1}{x}$ より　$x>0$ で常に $x > \log x$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	$(+\infty)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	1	↗	

$\therefore\ \frac{1}{x} < \frac{1}{\log x}$

$\therefore\ \frac{1}{k} < \frac{1}{\log k}$

よって　$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k} < \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\log k}$ より　$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\log k}$ は発散する.

(2) $\int \frac{dx}{x\log x} = \log(\log x) + C \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$

より 積分判定法を用いて、
$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\log k}$ は発散する。

(3) $\log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \int_1^{1+\frac{1}{k}}\frac{dx}{x} \leq 1\cdot\frac{1}{k}$

$\therefore\ \frac{1}{k}\log\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k^2}$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\log\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \leq 1+\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} = 1+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = 2$

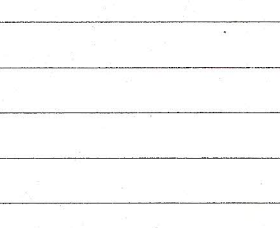
よって $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\log\left(1+\frac{1}{k}\right)$ は収束する。

[5]

(1) $a_k = -\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ とすると、これは交項級数なのでその無限和は収束する

一方　$a_k^2 = \frac{1}{k}$ でその無限和は

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} \geq \int_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \log(\to\infty)$



より発散する。
よってこの命題は偽である。