[3] (1) 『$\cos nt$ が $\cos t$ の n 次式で表され、$\sin nt \sin t$ が $\cos t$ の $(n+1)$ 次式で表される』…(＊)を数学的帰納法で示す

(i) $n=1$ のとき

$\cos t$, $\sin t \sin t = 1-\cos^2 t$ より (＊)は成立する

(ii) $n=1,2,\cdots,k$ で(＊)の成立を仮定すると

$\cos kt = Q_k(\cos t)$, $\sin kt \sin t = -R_{k+1}(\cos t)$ とおく。(Q_k, R_{k+1} の $\cos^{k+1} t$ の係数は共に正)

このとき

$$\cos(k+1)t = \cos kt \cos t - \sin kt \sin t$$
$$= Q_k(\cos t)\times\cos t + R_{k+1}(\cos t)$$

より $\cos t$ の $k+1$ 次式で表される。

このとき $\cos t = \cos \mathrm{Arccos}\, x = x$ より

$\cos nt = Q_n(x)$ であり x の n 次多項式で表される

(2) $x=\cos t$ とおくと

x	$-1 \to 1$
t	$\pi \to 0$

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t$$

$T_n(x) = \cos(n\,\mathrm{Arccos}(\cos t)) = \cos nt$

よって $T_n(x)T_m(x) = \cos nt \cos mt$

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{\pi}^{0} \frac{\cos nt \cos mt}{\sin t}\times(-\sin t)dt$$

$$= \int_0^{\pi} \cos nt \cos mt \, dt$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\cos(m+n)t + \cos(m-n)t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\sin(m+n)t + \frac{1}{m-n}\sin(m-n)t\right]_0^{\pi}$$

$$= 0$$

(3) $x=\cos t$ とおくと

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\pi}\cos^2 nt\,dt$$

$$= \int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2nt}{2}dt$$

$$= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2nt}{4n}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$