(1) $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^k$ への写像

$\Phi : (x_1 \cdots x_n) \mapsto (G_1(x_1 \cdots x_n), G_2(x_1 \cdots x_n), \cdots, G_k(x_1 \cdots x_n))$ のヤコビ行列

$$J_\Phi = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \frac{\partial G_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_1} & \frac{\partial G_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial G_k}{\partial x_1} & \frac{\partial G_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{n} k \quad k \times n \text{ 行列}$$

のランクが k より小さくなる点（Φ の特異点）

(2) $F(x_1, \cdots, x_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_k) = f(x_1 \cdots x_n) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j G_j(x_1 \cdots x_n)$ とおく時.

$$\begin{cases} F_{x_1} = 0, \cdots, F_{x_n} = 0 \\ G_1 = 0, \cdots, G_k = 0 \end{cases}$$ を みたす点.

多少ややこしいが 定理 4.2.4 に帰着できる（略）

<u>例 4.2.6</u>

条件 $x+y+z=4$，$xy+yz+zx=5$ の下に，$f(x,y,z)=xyz$ の最大値，最小値を求めよ

$$\begin{cases} G_1 = x+y+z-4 \\ G_2 = xy+yz+zx-5 \end{cases}$$

$G_1(x,y,z)=0 \cdots ①$ 有界ではない

$G_2(x,y,z)=0 \cdots ②$ 有界ではない（後述）

実は ① かつ ② なら有界

(x,y,z) が ① ② を同時にみたすなら，$x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx)$
$= 16 - 10 = 6$

$\therefore (x,y,z)$ は $x^2+y^2+z^2=6$ 上にある。 よって ① かつ ② は有界 //