例4.2.1 のつづき

$G(x,y) = x^2 + y^4 - 1$

$f(x,y) = xy$

$G_x(x,y) = 2x \qquad G_y(x,y) = 4y^3$

$G_x = G_y = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

$(0,0)$ は $G(x,y)=0$ 上にない。つまり、$G(x,y)=0$ 上には特異点はない
(i)のケースは考えなくてよい)

$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda G(x,y) = xy - \lambda(x^2+y^4-1)$

$F_x = y - 2\lambda x, \qquad F_y = x - 4\lambda y^3$

$$\begin{cases} F_x(a,b,\lambda) = 0 \\ F_y(a,b,\lambda) = 0 \\ G(a,b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b - 2\lambda a = 0 & \text{—— ①} \\ a - 4\lambda b^3 = 0 & \text{—— ②} \\ a^2 + b^4 = 1 & \text{—— ③} \end{cases}$$

①: $b = 2\lambda a$

②. ③に代入、 $a = 4\lambda(2\lambda a)^3 = 32\lambda^4 a^3$

$\Leftrightarrow a(1 - 32\lambda^4 a^2) = 0$ —— ②'

$a^2 + (2\lambda a)^4 = 1$

$\Leftrightarrow a^2(1 + 16\lambda^4 a^2) = 1$ —— ③'

②'より、$a = 0$ or $1 - 32\lambda^4 a^2 = 0$

③'より、$a = 0$ はありえない。 $\therefore 32\lambda^4 a^2 = 1, \quad 16\lambda^4 a^2 = \frac{1}{2}$

③'に代入して、 $a^2(1 + \frac{1}{2}) = 1 \qquad \therefore a = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\lambda^4 = \frac{1}{32a^2} = \frac{3}{2^6} \qquad \therefore \lambda = \pm\frac{\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{2}}$

$$b = 2a\lambda = \begin{cases} \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} & (a \text{ と } \lambda \text{ が同符号}) \\ -\frac{1}{\sqrt[4]{3}} & (\text{〃 異符号}) \end{cases}$$