4.2. 条件付き最大最小問題

例4.2.1

~~$x^2+y^4=1$ の下で~~、$f(x,y)=xy$ の最大値、最小値を求めよ。
条件つき

$\boxed{\text{アイデア}}$

(1) $G(x,y)=x^2+y^4-1$ とおくに、（条件：$G(x,y)=0$）

陰関数定理から、局所的には $y=\varphi(x)$ とかける。

(2) $f(x,y)=f(x,\varphi(x))=x\varphi(x) \longrightarrow$ 1変数の最大最小問題に帰着。

定理4.2.2（ラグランジュの未定乗数法）

f, G：2変数 C^1-級 かつ $G(x,y)=0$ が有界とする。

$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda G(x,y)$ とおく。（λ は未定乗数と呼ばれるパラメタ）

この時、条件 $G(x,y)=0$ の下で、$f(x,y)$ の最大値、最小値を与える点は次のいずれか。

(i) 曲線 $G(x,y)=0$ の特異点（$G_x(a,b)=0$ かつ $G_y(a,b)=0$ なる (a,b)）

(ii) x,y,λ を未知数とする連立方程式

$$\begin{cases} F_x(a,b,\lambda)=0 \\ F_y(a,b,\lambda)=0 \\ G(a,b)=0 \end{cases}$$

をみたす (a,b)

証）次は証明せずに用いる。

⇒ Fact

$G(x,y)=0$ が有界ならば、連続関数 $f(x,y)$ は $G(x,y)=0$ 上で最大最小値をとる。

まじめに示すには、実数の連続性が必要。（略）

(a,b) が最大値、最小値を与えるが、それは極値にもなっている。
(c,d) が極値を与えるとして、(i) でなかったとする。

$G_x(a,b)\neq 0$ or $G_y(a,b)\neq 0$

どちらでも同じなので、$G_y(a,b)\neq 0$ とする。