$\Rightarrow$ y 方向には $f(x, y)$ は単調増加

この時，y は x によって（$f(x, y)=0$ の解として）唯一つ定まる。

これを $y=\varphi(x)$ とおく。

つくり方から，$\begin{cases} f(x, \varphi(x))=0 \\ \varphi(a)=b \end{cases}$ さらに $\varphi(x)$ は連続．

Step2

φ は C^1 級

① (x, y)：長方形の内部

(s, t) を，$(x+s, y+t)$ が長方形に入るようにとる。

2変数平均値の定理から，

$$f(x+s, y+t)-f(x, y)=s\frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta s, y+\theta t)+t\frac{\partial f}{\partial y}(x+\theta s, y+\theta t) \quad (0<\theta<1)$$

$\begin{cases} y=\varphi(x) \\ t=\varphi(x+s)-\varphi(x) \end{cases}$ として代入

$$(\text{左辺})=f(x+s, \varphi(x)+\varphi(x+s)-\varphi(x))-f(x, \varphi(x))$$

$$=f(x+s, \varphi(x+s))-\underset{\substack{\| \\ 0}}{f(x, \varphi(x))}$$

$$=0 \quad (\text{tとsのとり方})$$

$$(\text{右辺})=s\frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta s, \varphi(x)+\theta(\varphi(x+s)-\varphi(x)))$$
$$+(\varphi(x+s)-\varphi(x))\frac{\partial f}{\partial y}(x+\theta s, \varphi(x)+\theta(\varphi(x+s)-\varphi(x)))$$

よって，
$$\frac{\varphi(x+s)-\varphi(x)}{s}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta s, \varphi(x)+\theta(\varphi(x+s)-\varphi(x)))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x+\theta s, \varphi(x)+\theta(\varphi(x+s)-\varphi(x)))}$$

両辺の lim をとる。

$(\text{左辺})=\varphi'(x)$

(右辺)（φ は連続．$\varphi(x+s)-\varphi(x)\xrightarrow{s\to 0}0$ に注意）

$$=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))} \leftarrow \text{連続} \quad \therefore \varphi \text{は} C^1 \text{級}$$

//