例) この結果は次のようにも得られる。

$y$を$x$の関数と思って、$f(x,y)=0$ の両辺を$x$で微分する。

$$f(x,y) = x^2+y^2-1 = x^2+y^2(x)-1$$

$$\frac{d}{dx} f(x,y(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 2x\cdot 1 + 2y\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$ ← さっきと同じ

このような計算を正当化するのが陰関数定理

**定理 4.1.2**

$f(x,y)$: $C^1$級, $f(a,b)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$

この時、$x=a$ のまわりで、$C^1$級関数$\varphi(x)$で、

(1) $f(x,\varphi(x))=0$

(2) $\varphi(a)=b$

を満たすものが一意的に存在する。

さらに、

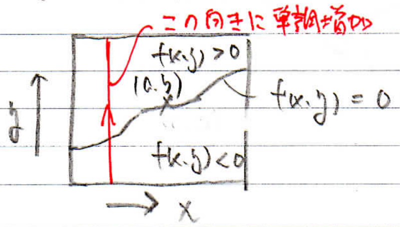
(3) $$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$$ が成り立つ。

証明)

Step1 $\varphi$の構成

$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) > 0$ と仮定（負でも同様にできる。）

$(a,b)$を中心とした十分小さい長方形を考える。




。$f$は$C^1$級 → $\frac{\partial f}{\partial y}$ 連続

→ 仮定から長方形の内部では $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)>0$ としてよい。