§4 陰関数定理とその応用

4.1 陰関数と陰関数定理

例4.1.1

円の方程式 $x^2+y^2=1$ $(\Leftrightarrow f(x,y)=x^2+y^2-1=0)$

yについて"むりやり"とく。

$y=\pm\sqrt{1-x^2}$

yはxのふつうの意味の関数ではない。xに対して、2つの値 $\pm\sqrt{1-x^2}$ を与える。

このように、xに対して値が2つ以上定まるような"関数"を多価関数と呼ぶ。

定義

$f(x,y)=0$ によって yをxの多価関数と考え、これを $f(x,y)=0$ で定義された陰関数と呼ぶ。

例4.1.1 のつづき

$f(x,y)=x^2+y^2-1$

$f(x,y)=0$ で定義される陰関数 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ に対して、

$y=\sqrt{1-x^2}$, $y=-\sqrt{1-x^2}$ を、陰関数の分枝(branch)という。

branchを1つとる。

$y=\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leq x\leq 1)$

$x\neq\pm 1$ とする。 $\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{y}$

一方、もう一つのbranchをとる。

$y=-\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leq x\leq 1)$

$x\neq\pm 1$ とする。 $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{y}$

どちらのbranchをとっても結果は同じ