$G(s,t)$ は $(0,0)$ で連続かつ $G(0,0)=0$ なので、

$\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ が存在して、

$0<\sqrt{s^2+t^2}<\delta \Rightarrow |G(s,t)|<\varepsilon$ …… (※)

Step2

(i) $\det H_f(a,b)=AC-B^2>0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)=A>0$

$\varepsilon>0$ を、$A-2\varepsilon>0$, $(A-2\varepsilon)(C-2\varepsilon)-B^2>0$

をみたすようにとる。

上の $\varepsilon>0$ に対して、$\delta>0$ を (※) をみたすようにとる。

この時、$0<\sqrt{s^2+t^2}<\delta$ ならば、

$$f(a+s,b+t)-f(a,b)>\frac{1}{2}(As^2+2Bst+Ct^2)-\varepsilon(s^2+t^2)$$

$$=\underbrace{\left(\frac{A}{2}-\varepsilon\right)}_{>0}\left\{\left(s+\frac{B}{A-2\varepsilon}t\right)^2+\underbrace{\frac{(A-2\varepsilon)(C-2\varepsilon)-B^2}{(A-2\varepsilon)^2}}_{>0}t^2\right\}>0$$

$\Rightarrow f(a,b)$ は極小。

2次形式の理論(数Ⅱの最後)
を使うとスッキリかける。

例3.8.6

$f(x,y)=x^3-3xy+y^3$

$\frac{\partial f}{\partial x}=3(x^2-y)$ $\frac{\partial f}{\partial y}=3(y^2-x)$ $\Rightarrow$ 極値をとる点の候補
$(0,0)$, $(1,1)$

$f_{xx}=6x$ $f_{xy}=-3$ $f_{yy}=6y$

$$\longrightarrow H_f=\begin{pmatrix}6x & -3\\ -3 & 6y\end{pmatrix}$$