Date . .

$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) < 0$ としても、同様に矛盾

$\therefore \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$

同様に $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ □

定義 $f(x,y)$: C^2 級 行列 $H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$ (2×2行列)

を ヘッセ行列 (Hesse)、その行列式 $\det H_f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$ を

ヘッシアン という

定理 3.5.7

$f(x,y)$: C^2 級 $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ とする

(i) $\det H_f(a,b) > 0$ かつ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$

$\Rightarrow f(x,y)$ は (a,b) で極小

(ii) $\det H_f(a,b) > 0$ かつ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$

$\Rightarrow f(x,y)$ は (a,b) で極大

(iii) $\det H_f(a,b) < 0 \Rightarrow f(a,b)$ は極値ではない。

注 (1) $\det H_f(a,b) = 0$ の時、 → 何もわからない。

極値であることも、そうでないこともある

(1変数の時の $f'(a) = 0$ のケースにあたる) → より高階の微分のデータが必要