但し、

$$\left(s\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial y}\right)f = s\frac{\partial f}{\partial x}+t\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\left(s\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f = \left(s\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot\left(s\frac{\partial f}{\partial x}+t\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= s^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+st\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+st\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+t^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$= s^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2st\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+t^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

別の見い方. $\left(s\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = s^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2st\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+t^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$

注 f が C^2 級 との仮定の下に 計算が 正当化される。

証)

$g(u)=f(a+su,\ b+tu)$ として 1変数のテイラーの定理を用いる. □.

定理 3.8.3

$f(x,y)$: C^1 級が (a,b) で極値をとる

$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0$ かつ $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$ //.

証明) $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\neq 0$.

たとえば, $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)>0$ とする.

$\frac{\partial f}{\partial x}$ は連続なので. (a,b) の近くでは,

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)>0$

よって y を $y=b$ に fix すると,

$f(x,b)$ は $\frac{\partial f}{\partial x}(x,b)>0$

$x=a$ のまわりで, $f(x,b)$ は単調増加. これは (a,b) が極値であることに矛盾.