# 練習問題の解答例

チャム

解答例なので、正しい解答が２通り以上あるかもしれません。

注：解答例を見る前に必ず**自分で**やってみてください！



## １章

問1.1　1.7 式は糸の方向のつりあいの式です。それは遠心力、糸方向の重力と糸の張力です。

1.8 式は運動の方向の運動方程式です。力は運動方向の重力しかないです。左辺は加速度ですね（加速度＝長さ×角加速度）

問 1.2　$U(x) = k\cosh x$ より、$U''(x) = k\cosh x$　（$\frac{d^2}{dx^2}\cosh x = \cosh x$）

1.12 式より、$x_0 = 0$ を代入して

$$m\ddot{x} = -k\cosh 0\left(x\right) = -kx$$

1.1 式と同様だから

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

問 1.3　1.15 式より

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{\left(2\pi f\right)^2 C} = 4.0\times10^{-12}\ \mathrm{H}$$

問 1.4　8 ページの一番下の行の式より

$$\omega_0 = 2\pi f = \sqrt{\frac{Sv^2}{Vl}} = \sqrt{\frac{\left(3\ \mathrm{cm}^2\right)\left(340\ \mathrm{m/s}\right)^2}{\left(750\ \mathrm{cc}\right)\left(8\ \mathrm{cm}\right)}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\left(3\times10^{-4}\ \mathrm{m}^2\right)\left(340\ \mathrm{m/s}\right)^2}{\left(750\times10^{-6}\ \mathrm{m}^3\right)\left(8\times10^{-2}\ \mathrm{m}\right)}} = 121\ \mathrm{Hz}$$

問 1.5　試験範囲外なので省略。

問 1.6　錘は小さいのでそれの慣性モーメントを考えなくてもいい。

運動方程式は 1.30 式（この式の導き方はいいかな？）で、1.31 式と 1.10 式の式で変数$\gamma$、$\omega_0$に変換して 1.44 が得られる。

1.31 式より、$\gamma = \dfrac{3\pi a\eta}{m}$を使って質量を密度と体積の積、半径を直径の半分から求めて、

$$\gamma = \frac{3\pi\left(1\times10^{-2}\ \mathrm{m}\right)\left(1.82\times10^{-5}\ \mathrm{Pa\cdot s}\right)}{\left(7.86\times10^{3}\ \mathrm{kg/m^3}\right)\times\dfrac{4}{3}\pi\left(1\times10^{-2}\ \mathrm{m}\right)^3} = 5.2\times10^{-5}\ \mathrm{s^{-1}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}\ \text{だから、}\ \omega_0 = \sqrt{\frac{9.8\ \mathrm{m/s^2}}{1\ \mathrm{m}}} = 3.1\ \mathrm{s^{-1}}$$

実はこの振り子の角振動数は$\sqrt{\omega_0^2+\gamma^2}$ですが$\gamma$はすごく小さいので$\omega_0$に近似できる。

100 周期は$100\times\dfrac{2\pi}{\omega_0}\simeq 200\ \mathrm{s}$に近似できて、この間 1.44 式の振幅は

$$Ae^{-\gamma 100T} = A\left(0.99\right)$$

になり、振幅は１％下がった。

直径を倍にする場合を考える。$\gamma$は半径に比例するが質量（半径の３乗）に反比例する。その結果$\gamma$は半径の２乗に反比例する。直径を倍にすれば$\gamma$は４分の１になって

$$Ae^{-\frac{\gamma}{4}100T} = A\left(0.997\right)$$

になる。振幅は 0.3%下がった。

発泡スチロールに代えたら密度$20\ \mathrm{kg/m^3}$を$\gamma$の式に代入して計算すると

$$\gamma = \frac{3\pi\left(1\times10^{-2}\ \mathrm{m}\right)\left(1.82\times10^{-5}\ \mathrm{Pa\cdot s}\right)}{\left(20\ \mathrm{kg/m^3}\right)\times\dfrac{4}{3}\pi\left(1\times10^{-2}\ \mathrm{m}\right)^3} = 0.020\ \mathrm{s^{-1}}\ \text{に変わって}$$

$$Ae^{-\gamma 100T} = A\left(0.018\right)$$

になる。大きく下がった。

<u>問 1.7</u>

図 1.12 を見れば分かるように

$$x = r\cos\phi$$
$$y = r\sin\phi$$

これらの関係を微分する

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi$$
$$\dot{y} = \dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi$$

もう一回微分する

$$\ddot{x} = \ddot{r}\cos\phi - 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\phi - r\ddot{\phi}\sin\phi - r\dot{\phi}^2\cos\phi$$
$$\ddot{y} = \ddot{r}\sin\phi + 2\dot{r}\dot{\phi}\cos\phi + r\ddot{\phi}\cos\phi - r\dot{\phi}^2\sin\phi$$

1.53 式と 1.54 式に代入する

$$m\left(\ddot{r}\cos\phi - 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\phi - r\ddot{\phi}\sin\phi - r\dot{\phi}^2\cos\phi\right) = mg - T\cos\phi \qquad \boxed{\text{イ}}$$
$$m\left(\ddot{r}\sin\phi + 2\dot{r}\dot{\phi}\cos\phi + r\ddot{\phi}\cos\phi - r\dot{\phi}^2\sin\phi\right) = -T\sin\phi \qquad \boxed{\text{ロ}}$$

ロ$\times\sin\phi$ ＋ イ$\times\cos\phi$ → $m\left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right) = mg\cos\phi - T$

ロ$\times\cos\phi$ － イ$\times\sin\phi$ → $m\left(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}\right) = -mg\sin\phi$

<u>問 1.8</u>　1.32 式　$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$　に $t' = -t$ （つまり $\dfrac{dt'}{dt} = -1$）を用いると

$$\begin{aligned}
\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}x + 2\gamma\frac{d}{dt}x + \omega_0^2 x = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{dt'}{dt}\frac{d}{dt'}\left(\frac{dt'}{dt}\frac{d}{dt'}x\right) + 2\gamma\frac{dt'}{dt}\frac{d}{dt'}x + \omega_0^2 x = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -\frac{d}{dt'}\left(-\frac{d}{dt'}x\right) + 2\gamma(-1)\frac{d}{dt'}x + \omega_0^2 x = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{d^2}{dt'^2}x - 2\gamma\frac{d}{dt'}x + \omega_0^2 x = 0
\end{aligned}$$

<u>問 1.9</u>　一定の速さで 10%重心をあげる　→　$\gamma = \dfrac{\dot{r}}{r} = \dfrac{\Delta r/\Delta t}{r} = \dfrac{-0.1}{T/2}$

半周期に振幅が $e^{-\gamma\frac{T}{2}}$ 倍に増大して、銃身を戻すときには振幅に影響を及ばない。

残りの半周期にまた振幅が $e^{-\gamma\frac{T}{2}}$ 倍に増大する。一周期に

$$e^{-\gamma\frac{T}{2}}e^{-\gamma\frac{T}{2}} = e^{-\gamma T} = e^{0.2} = 1.22$$

倍に増加する。従って一周期 22%増加する。

問 1.10

$x_i$ を $m\ddot{x}_i + 2m\gamma\dot{x}_i + m\omega_0^2 x_i = F_i \cos\left(\omega_i t + \alpha_i\right)$ を満たす解とする。

$m\ddot{x} + 2m\gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x = f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i \cos\left(\omega_i t + \alpha_i\right)$ の解 $x$ を $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ と仮定する。解を方程式の左辺に代入してみる。

$$= m\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right) + 2m\gamma\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right) + m\omega_0^2 \sum_{i=1}^{\infty} x_i$$

$$= m\left(\sum_{i=1}^{\infty} \ddot{x}_i\right) + 2m\gamma\left(\sum_{i=1}^{\infty} \dot{x}_i\right) + m\omega_0^2 \sum_{i=1}^{\infty} x_i$$ （和の微分は微分の和に等しい）

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\left(m\ddot{x}_i + 2m\gamma\dot{x}_i + m\omega_0^2 x_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} F_i \cos\left(\omega_i t + \alpha_i\right)$$ ＝右辺

$\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ が $m\ddot{x} + 2m\gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x = f(t)$ の一つの解であることがわかる。（他の解ももちろんありますが特解として一つだけ求めればよい。）

問 1.11

$m\ddot{x} + 2m\gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x = F\cos\omega t$ の特解を $X(t)$、$m\ddot{x} + 2m\gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x = 0$ の一般解を $Y(t)$ とする。 $X(t) + Y(t)$ を方程式の左辺に代入する。

$$m\frac{d^2}{dt^2}\left(X + Y\right) + 2m\gamma\frac{d}{dt}\left(X + Y\right) + m\omega_0^2\left(X + Y\right)$$

$$= m\ddot{X} + 2m\gamma\dot{X} + m\omega_0^2 X + m\ddot{Y} + 2m\gamma\dot{Y} + m\omega_0^2 Y$$

$$= \left(m\ddot{X} + 2m\gamma\dot{X} + m\omega_0^2 X\right) + \left(m\ddot{Y} + 2m\gamma\dot{Y} + m\omega_0^2 Y\right)$$

$$= F\cos\omega t + 0 = F\cos\omega t$$ ＝右辺

$X(t) + Y(t)$ が $m\ddot{x} + 2m\gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x = F\cos\omega t$ を満たすことが分かる。（ｉ）

一般解 $Y(t)$ は任意定数 2 個を含める。$Y(t) = A\,y_1(t) + B\,y_2(t)$ とおく。だから $X(t) + Y(t) = X(t) + A\,y_1(t) + B\,y_2(t)$。初期条件として $t = 0$ で $x = x(0)$、$\dot{x} = \dot{x}(0)$ を用いると、$X(t) + A\,y_1(t) + B\,y_2(t)$ の解は、$A$ と $B$ を

$$\left.\begin{aligned} X(0) + A\,y_1(0) + B\,y_2(0) = x(0) \\ \dot{X}(0) + A\,\dot{y}_1(0) + B\,\dot{y}_2(0) = \dot{x}(0) \end{aligned}\right\}$$

の関係式を満たすようにとれば、$X(t) + A\,y_1(t) + B\,y_2(t)$ は初期条件を満たせる。

# ２章

<u>問 2.1</u>　$x_1(0)=x_0$ より　$\dfrac{A}{2}\cos\alpha+\dfrac{B}{2}\cos\beta=x_0$　①

$\dot{x}_1(0)=0$ より　$\dfrac{A}{2}\omega_1\sin\alpha+\dfrac{B}{2}\omega_2\sin\beta=0$　②

$x_2(0)=0$ より　$\dfrac{A}{2}\cos\alpha-\dfrac{B}{2}\cos\beta=0$　③

$\dot{x}_2(0)=0$ より　$\dfrac{A}{2}\omega_1\sin\alpha-\dfrac{B}{2}\omega_2\sin\beta=0$　④

②＋④　→　$A\omega_1\sin\alpha=0$　→　$\sin\alpha=0$　→　$\alpha=0$

①＋③　→　$A\cos\alpha=x_0$　→　$A=x_0$

②－④　→　$B\omega_2\sin\beta=0$　→　$\sin\beta=0$　→　$\beta=0$

①－③　→　$B\cos\beta=x_0$　→　$B=x_0$

従って、$A=x_0$、$B=x_0$、$\alpha=0$ 、$\beta=0$

<u>問 2.2</u>

2.21 式の $B$ を全て $-B$ に入れ替えればよい。

$$x_2(t)=C'(t)\cos\left(\omega_1 t+\alpha+\phi'(t)\right)$$

ただし、$C'(t)$ が

$$\frac{1}{2}\sqrt{A^2+(-B)^2+2A(-B)\cos\left(\Delta\omega t+\beta-\alpha\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\left(\Delta\omega t+\beta-\alpha\right)}$$

で、（実軸との）角度 $\phi'(t)$ が

$$\arctan\left[\frac{(-B)\sin\left(\Delta\omega t+\beta-\alpha\right)}{A+(-B)\cos\left(\Delta\omega t+\beta-\alpha\right)}\right] = \arctan\left[-\frac{B\sin\left(\Delta\omega t+\beta-\alpha\right)}{A-B\cos\left(\Delta\omega t+\beta-\alpha\right)}\right]$$

です。2.19 式より $C(t)$ が最大になるには $\cos\left(\Delta\omega t+\beta-\alpha\right)$ が最大になる、即ち

$\cos\left(\Delta\omega t+\beta-\alpha\right)=1$ のときです。このとき $C'(t)$ のマイナスの項が最大になり、$C'(t)$ が最小になることが分かる。

問 2.3

2.41 式より

$$\omega = \sqrt{\frac{k+k'}{m}} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{k}{m}}$$

2.42 式より

$$\omega = \sqrt{\frac{k+3k' \pm \sqrt{k^2 - 2kk' + 9k'^2}}{2m}} = \sqrt{\frac{5/2\,k \pm \sqrt{9/4\,k^2}}{2m}} = \sqrt{\frac{5k \pm 3k}{4m}} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{k}{m}}\ ,\ \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

大きさの順に

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{k}{m}}\text{、}\ \omega_2 = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{k}{m}}\text{、}\ \omega_3 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

です。

① $\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{k}{m}}$ の基準振動。$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{k}{m}}$ を 2.36 式の上と下の式に代入する。

$$\left(k + k/2 - k/2\right)c_1 - \left(k/2\right)c_2 = 0 \quad \to \quad 2c_1 = c_2$$

$$\left(-k/2\right)c_2 + \left(k + k/2 - k/2\right)c_3 = 0 \quad \to \quad 2c_3 = c_2$$

$$\therefore \quad 2c_1 = c_2 = 2c_3$$

$$\left(x_1(t)\ ,\ x_2(t)\ ,\ x_3(t)\right) = \left(c_1\ ,\ c_2\ ,\ c_3\right)\cos\left(\omega_1 t + \alpha_1\right)$$

$$\left(x_1(t)\ ,\ x_2(t)\ ,\ x_3(t)\right) = \left(1\ ,\ 2\ ,\ 1\right)c_1 \cos\left(\omega_1 t + \alpha_1\right)$$

固有ベクトルの長さを 1 にしたい。$\sqrt{6}\ c_1 = A_1$ とおくと

$$\left(x_1(t)\ ,\ x_2(t)\ ,\ x_3(t)\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\ ,\ \frac{2}{\sqrt{6}}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)A_1 \cos\left(\omega_1 t + \alpha_1\right)$$

$\omega_1$ の基準振動が得られる。

② $\omega_2 = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{k}{m}}$ の基準振動。2.36 式の上と真ん中の式に代入する。

$$\left(k + k/2 - 3k/2\right)c_1 - \left(k/2\right)c_2 = 0 \quad \to \quad c_2 = 0$$

$$-\left(k/2\right)c_1 + \left(2k/2 - 3k/2\right)c_2 - \left(k/2\right)c_3 = 0 \quad \to \quad c_1 = -c_3$$

上と同様の操作をする。

$$\left(x_1(t)\ ,\ x_2(t)\ ,x_3(t)\right)\ =\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,0\ ,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)A_2\cos\left(\omega_2 t+\alpha_2\right)$$

③ $\omega_3=\sqrt{\dfrac{2k}{m}}$ の基準振動。$\omega_3=\sqrt{\dfrac{2k}{m}}$ を 2.36 式の上と下の式に代入する。

$$\left(k+k/2-2k\right)c_1-\left(k/2\right)c_2=0 \quad \to \quad c_1=-c_2$$

$$\left(-k/2\right)c_2+\left(k+k/2-2k\right)c_3=0 \quad \to \quad c_3=-c_2$$

$\therefore\ \ c_1=-c_2=c_3$

上と同様の操作をする。

$$\left(x_1(t)\ ,\ x_2(t)\ ,x_3(t)\right)\ =\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\ ,\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)A_2\cos\left(\omega_2 t+\alpha_2\right)$$

<u>問 2.4</u>

（１）2.52 式より　$\left(x_1,x_2,x_3\right)=Q_1\boldsymbol{e}_1+Q_2\boldsymbol{e}_2+Q_3\boldsymbol{e}_3$

両辺に $\boldsymbol{e}_1$ との内積をとる　→　
$$\begin{aligned}\left(x_1,x_2,x_3\right)\cdot\boldsymbol{e}_1&=Q_1\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1+Q_2\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1+Q_3\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_1\\&=Q_1\times1+Q_2\times0+Q_3\times0\quad=Q_1\end{aligned}$$

両辺に $\boldsymbol{e}_2$ との内積をとる　→　$\left(x_1,x_2,x_3\right)\cdot\boldsymbol{e}_2=Q_1\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+Q_2\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2+Q_3\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_2\quad=Q_2$

両辺に $\boldsymbol{e}_1$ との内積をとる　→　$\left(x_1,x_2,x_3\right)\cdot\boldsymbol{e}_3=Q_1\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3+Q_2\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3+Q_3\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3\quad=Q_3$

2.58 式が証明された。

（２）見やすくするために$(t)$を省略しておくが実際には書いた方がいいかもしれない。

① $\ddot{Q}_1=\dfrac{1}{2}\ddot{x}_1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ddot{x}_2+\dfrac{1}{2}\ddot{x}_3$

$$\begin{aligned}\ddot{Q}_1&=\frac{1}{2}\left[-\frac{k}{m}x_1+\frac{k}{m}x_2-\frac{k}{m}x_1\right]+\frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\frac{k}{m}x_2+\frac{k}{m}x_1+\frac{k}{m}x_3-\frac{k}{m}x_2\right]+\frac{1}{2}\left[-\frac{k}{m}x_3+\frac{k}{m}x_2-\frac{k}{m}x_3\right]\\&=\left[-\frac{k}{2m}-\frac{k}{2m}+\frac{k}{\sqrt{2}m}\right]x_1+\left[\frac{k}{2m}-\frac{k}{\sqrt{2}m}-\frac{k}{\sqrt{2}m}+\frac{k}{2m}\right]x_2+\left[\frac{k}{\sqrt{2}m}-\frac{k}{2m}-\frac{k}{2m}\right]x_3\\&=-\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)k}{2m}x_1-\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)k}{m}x_2-\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)k}{2m}x_3\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)k}{m}\left[\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right] \\
&= -\omega_1^2 Q_1
\end{aligned}
$$

② $\ddot{Q}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ddot{x}_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ddot{x}_3$

$$
\begin{aligned}
\ddot{Q}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\frac{k}{m}x_1 + \frac{k}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1\right] - \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\frac{k}{m}x_3 + \frac{k}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_3\right] \\
&= \left[-\frac{k}{\sqrt{2}m} - \frac{k}{\sqrt{2}m}\right]x_1 + \left[\frac{k}{\sqrt{2}m} - \frac{k}{\sqrt{2}m}\right]x_2 + \left[\frac{k}{\sqrt{2}m} + \frac{k}{\sqrt{2}m}\right]x_3 \\
&= -\frac{2k}{\sqrt{2}m}x_1 + \frac{2k}{\sqrt{2}m}x_3 \\
&= -\frac{2k}{m}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3\right] \\
&= -\omega_2^2 Q_2
\end{aligned}
$$

③ $\ddot{Q}_1 = \dfrac{1}{2}\ddot{x}_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ddot{x}_2 + \dfrac{1}{2}\ddot{x}_3$

$$
\begin{aligned}
\ddot{Q}_2 &= \frac{1}{2}\left[-\frac{k}{m}x_1 + \frac{k}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1\right] - \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\frac{k}{m}x_2 + \frac{k}{m}x_1 + \frac{k}{m}x_3 - \frac{k}{m}x_2\right] + \frac{1}{2}\left[-\frac{k}{m}x_3 + \frac{k}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_3\right] \\
&= \left[-\frac{k}{2m} - \frac{k}{2m} - \frac{k}{\sqrt{2}m}\right]x_1 + \left[\frac{k}{2m} + \frac{k}{\sqrt{2}m} + \frac{k}{\sqrt{2}m} + \frac{k}{2m}\right]x_2 + \left[-\frac{k}{\sqrt{2}m} - \frac{k}{2m} - \frac{k}{2m}\right]x_3 \\
&= -\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)k}{2m}x_1 + \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)k}{m}x_2 - \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)k}{2m}x_3 \\
&= -\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)k}{m}\left[\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right] \\
&= -\omega_3^2 Q_3
\end{aligned}
$$

<u>問 2.5</u>

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k\left(x_1 - x_2\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(x_2 - x_3\right)^2 + \frac{1}{2}kx_3^2 \\
&= k\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3\right) \\
&= k\Bigg[\left(\frac{1}{2}Q_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}Q_2 + \frac{1}{2}Q_3\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}Q_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}Q_3\right)^2 + \left(\frac{1}{2}Q_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}Q_2 + \frac{1}{2}Q_3\right)^2 \\
&\qquad - \left(\frac{1}{2}Q_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}Q_2 + \frac{1}{2}Q_3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Q_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}Q_3\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}Q_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}Q_3\right)\left(\frac{1}{2}Q_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}Q_2 + \frac{1}{2}Q_3\right)\Bigg]
\end{aligned}
$$

第一項　→　$\left(\frac{1}{2}Q_1+\frac{1}{\sqrt{2}}Q_2+\frac{1}{2}Q_3\right)^2=\left(\frac{1}{2}Q_1+\frac{1}{2}Q_3\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Q_2\right)^2+2\left(\frac{1}{2}Q_1+\frac{1}{2}Q_3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Q_2\right)$

第三項 →　$\left(\frac{1}{2}Q_1-\frac{1}{\sqrt{2}}Q_2+\frac{1}{2}Q_3\right)^2=\left(\frac{1}{2}Q_1+\frac{1}{2}Q_3\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Q_2\right)^2-2\left(\frac{1}{2}Q_1+\frac{1}{2}Q_3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Q_2\right)$

第一項と第二項の和　→　$2\left(\frac{1}{2}Q_1+\frac{1}{2}Q_3\right)^2+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Q_2\right)^2$

第四項と第五項の共通因数 $x_2$ がある　→

$$-\left(\frac{1}{2}Q_1+\frac{1}{\sqrt{2}}Q_2+\frac{1}{2}Q_3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Q_1-\frac{1}{\sqrt{2}}Q_3\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Q_1-\frac{1}{\sqrt{2}}Q_3\right)\left(\frac{1}{2}Q_1-\frac{1}{\sqrt{2}}Q_2+\frac{1}{2}Q_3\right)=-\left(Q_1+Q_3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Q_1-\frac{1}{\sqrt{2}}Q_3\right)$$

$$\begin{aligned}
\therefore U &= k\left[2\left(\frac{1}{2}Q_1+\frac{1}{2}Q_3\right)^2+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Q_2\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Q_1-\frac{1}{\sqrt{2}}Q_3\right)^2\right.\\
&\qquad\left.-\left(Q_1+Q_3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Q_1-\frac{1}{\sqrt{2}}Q_3\right)\right]\\
&=k\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Q_1+\frac{1}{\sqrt{2}}Q_3\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Q_1-\frac{1}{\sqrt{2}}Q_3\right)^2+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Q_2\right)^2-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(Q_1+Q_3\right)\left(Q_1-Q_3\right)\right]\\
&=k\left[Q_1^2+Q_3^2+Q_2^2-\frac{Q_1^2}{\sqrt{2}}+\frac{Q_3^2}{\sqrt{2}}\right]\\
&=\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{2}\right)kQ_1^2+\frac{1}{2}2kQ_2^2+\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{2}\right)kQ_3^2\\
&=\frac{1}{2}m\omega_1^2Q_1^2+\frac{1}{2}m\omega_2^2Q_2^2+\frac{1}{2}m\omega_3^2Q_3^2
\end{aligned}$$

<u>問 2.6</u>　初期条件は　$\left(x_1(0),x_2(0),x_3(0)\right)=(0,0,0)$、$\left(\dot{x}_1(0),\dot{x}_2(0),\dot{x}_3(0)\right)=(0,u,0)$

$Q_1(t)=A_1\cos\left(\omega_1 t+\alpha_1\right)$、$Q_2(t)=A_2\cos\left(\omega_2 t+\alpha_2\right)$、$Q_3(t)=A_3\cos\left(\omega_3 t+\alpha_3\right)$ とする。

$$A_1\cos(\alpha_1) = Q_1(0) = \left(x_1(0),x_2(0),x_3(0)\right)\cdot\boldsymbol{e}_1 = (0,0,0)\cdot\boldsymbol{e}_1 = 0$$

なので、$\alpha_1=\pi/2$

同様に、$\alpha_2=\pi/2$、$\alpha_3=\pi/2$

代入して、$Q_1(t)=-A_1\sin\left(\omega_1 t\right)$、$Q_2(t)=-A_2\sin\left(\omega_2 t\right)$、$Q_3(t)=-A_3\sin\left(\omega_3 t\right)$

そして、$\dot{Q}_1(t)=-A_1\omega_1\cos\left(\omega_1 t\right)$、$\dot{Q}_2(t)=-A_2\omega_2\cos\left(\omega_2 t\right)$、$\dot{Q}_3(t)=-A_3\omega_3\cos\left(\omega_3 t\right)$

$$-A_1\omega_1 \;=\; \dot{Q}_1(0) \;=\; (0,u,0)\cdot \boldsymbol{e}_1 = \;(0,u,0)\cdot\left(1/2,\ 1/\sqrt{2},\ 1/2\right) \;=\; u/\sqrt{2}$$

$$\therefore A_1 \;=\; -\sqrt{\frac{m}{2\left(2-\sqrt{2}\right)k}}\;u \;=\; -\sqrt{\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)m}{4k}}\;u$$

$$-A_2\omega_2 \;=\; \dot{Q}_2(0) \;=\; (0,u,0)\cdot \boldsymbol{e}_2 = \;(0,u,0)\cdot\left(1/\sqrt{2},\ 0,\ -1/\sqrt{2}\right) \;=\; 0$$

$$\therefore A_2 \;=\; 0$$

$$-A_3\omega_3 \;=\; \dot{Q}_3(0) \;=\; (0,u,0)\cdot \boldsymbol{e}_3 = \;(0,u,0)\cdot\left(1/2,\ -1/\sqrt{2},\ 1/2\right) \;=\; -u/\sqrt{2}$$

$$\therefore A_3 \;=\; \sqrt{\frac{m}{2\left(2+\sqrt{2}\right)k}}\;u \;=\; \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)m}{4k}}\;u$$

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \frac{1}{2}Q_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}Q_2 + \frac{1}{2}Q_3\\ &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)m}{k}}\;u\sin\omega_1 t - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)m}{k}}\;u\sin\omega_3 t\end{aligned}$$

動き始める$\Rightarrow t\approx 0$を考える。

$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - .... \approx x$という近似を使ってみると

$$x_1(t)\approx \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)m}{k}}u\omega_1 t - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)m}{k}}\;u\omega_3 t = 0$$

になってしまう。この近似については近似しすぎる。$\sin x \approx x - x^3/3!$を使ってみよう。

$$\begin{aligned}x_1(t) &\approx \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)m}{k}}u\omega_1 t - \frac{1}{24}\sqrt{\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)m}{k}}u\omega_1^3 t^3 - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)m}{k}}\;u\omega_3 t + \frac{1}{24}\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)m}{k}}u\omega_3^3 t^3\\ &= -\frac{1}{12\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m}{\left(2-\sqrt{2}\right)k}}u\omega_1^3 t^3 + \frac{1}{12\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m}{\left(2+\sqrt{2}\right)k}}u\omega_3^3 t^3\\ &= \frac{1}{12\sqrt{2}}ut^3\left[-\omega_1^2+\omega_3^2\right]\\ &= \frac{1}{12\sqrt{2}}ut^3\left[-\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)k}{m} + \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)k}{m}\right]\\ &= \frac{kut^3}{6m}\end{aligned}$$

従って一番目の質点は$t^3$に比例して動き始める。

# ３章

<u>問 3.1</u>

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\boldsymbol{e}_j\right)_m\left(\boldsymbol{e}_j\right)_n = \frac{2}{N+1}\sum_{j=1}^{N}\sin\left(mk_j a\right)\sin\left(nk_j a\right)$$
$$= \frac{2}{N+1}\sum_{j=1}^{N}\sin\left(mj\pi/(N+1)\right)\sin\left(nj\pi/(N+1)\right)$$
$$= \frac{2}{N+1}\sum_{j=1}^{N}\sin\left(jm\phi\right)\sin\left(jn\phi\right)$$

この式の $m,n,j$ を $j,l,n$ の順に入れ替えれば 3.41 式と全く同じ式になる。直交性と同様に計算すると

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\boldsymbol{e}_j\right)_m\left(\boldsymbol{e}_j\right)_n = \frac{2}{N+1}\sum_{j=1}^{N}\sin\left(jm\phi\right)\sin\left(jn\phi\right) = \delta_{m,n}$$

になる。

＊別の補足説明のファイルを見たら、3.39 式の固有ベクトルは

$$\boldsymbol{e}_1 = \sqrt{2/N+1}\left(\sin(\phi),\sin(2\phi),\sin(3\phi),\ldots\sin(N\phi)\right)$$
$$\boldsymbol{e}_2 = \sqrt{2/N+1}\left(\sin(2\phi),\sin(4\phi),\sin(6\phi),\ldots\sin(2N\phi)\right)$$
$$\boldsymbol{e}_3 = \sqrt{2/N+1}\left(\sin(3\phi),\sin(6\phi),\sin(9\phi),\ldots\sin(3N\phi)\right)$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{e}_N = \sqrt{2/N+1}\left(\sin(N\phi),\sin(2N\phi),\sin(3N\phi),\ldots\sin(N^2\phi)\right)$$

なので、縦の掛け算（直交性の確認）でも横の掛け算（完全性の確認）でも同じ式になるのは明らかだろう。（対称行列みたいに見えますね？）

<u>問 3.2</u>

$m$ と $n$ が異なる場合、$\boldsymbol{e}_j$ の各成分の中でゼロでないものは一つしかないので

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\boldsymbol{e}_j\right)_m\left(\boldsymbol{e}_j\right)_n = 0$$

が明らかだろう。

$m$ と $n$ が同じ場合、それを $m$ にして、$\boldsymbol{e}_j$ の成分は $j$ 成分が ±1、その他は 0 なので

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\boldsymbol{e}_j\right)_m\left(\boldsymbol{e}_j\right)_m=\left(\boldsymbol{e}_1\right)_m\left(\boldsymbol{e}_1\right)_m+\left(\boldsymbol{e}_2\right)_m\left(\boldsymbol{e}_2\right)_m+\ldots+\left(\boldsymbol{e}_m\right)_m\left(\boldsymbol{e}_m\right)_m+\ldots+\left(\boldsymbol{e}_N\right)_m\left(\boldsymbol{e}_N\right)_m$$

$$=0+\ldots+\left(\pm1\right)^2+\ldots+0=1$$

で、3.51 式が確認された。

<u>問 3.3</u>　試験範囲外なので省略。

<u>問 3.4</u>

$$\int_0^L e_j(x)e_l(x)dx=\frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{l\pi x}{L}\right)dx$$

$j=l$ の場合

$$\begin{aligned}
&=\frac{2}{L}\int_0^L \sin^2\left(\frac{j\pi x}{L}\right)dx\\
&=\frac{1}{L}\int_0^L (1-\cos\frac{2j\pi x}{L})dx\\
&=\frac{1}{L}\left[x-\frac{L}{2j\pi}\sin\frac{2j\pi x}{L}\right]_0^L\\
&=\frac{1}{L}\left(L-\frac{L}{2j\pi}\sin 2j\pi\right)=1
\end{aligned}$$

$j\neq l$ の場合

$$\begin{aligned}
&=\frac{2}{L}\int_0^L \frac{1}{2}\left(\cos\frac{(j-l)\pi x}{L}-\cos\frac{(j+l)\pi x}{L}\right)dx\\
&=\frac{1}{L}\left[\frac{L}{(j-l)\pi}\sin\frac{(j-l)\pi x}{L}-\frac{L}{(j+l)\pi}\sin\frac{(j+l)\pi x}{L}\right]_0^L\\
&=\frac{1}{L}\left(\frac{L}{(j-l)\pi}\sin(j-l)\pi-\frac{L}{(j+l)\pi}\sin(j+l)\pi\right)\\
&=0
\end{aligned}$$

3.109 式が確認された。（こんな規格化・直交関数は構造化学の「箱の中の粒子」にも同様な式が出ることに注意）

<u>問 3.5</u>　解き方を 2 通り紹介しましょう。

問 3.5－1

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f\left(x-vt\right)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f\left(x-vt\right)=\frac{\partial}{\partial x} f'\left(x-vt\right)= f''\left(x-vt\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} g\left(x+vt\right)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} g\left(x+vt\right)=\frac{\partial}{\partial x} g'\left(x+vt\right)= g''\left(x+vt\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f\left(x-vt\right)=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t} f\left(x-vt\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-v\right) f'\left(x-vt\right)= v^2 f''\left(x-vt\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} g\left(x+vt\right)=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t} g\left(x+vt\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(v\right) g'\left(x+vt\right)= v^2 g''\left(x+vt\right)$$

3.118 式を 3.99 式の左辺に代入する。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi(x,t) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} f\left(x-vt\right)+\frac{\partial^2}{\partial t^2} g\left(x+vt\right)\\
&= v^2 f''\left(x-vt\right)+v^2 g''\left(x+vt\right)\\
&= v^2\left( f''\left(x-vt\right)+g''\left(x+vt\right)\right)\\
&= v^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f\left(x-vt\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2} g\left(x+vt\right)\right)\\
&= v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi(x,t)
\end{aligned}$$

問 3.5－2　少し難しいので読み飛ばしてもかまわない。

$x-vt$ を $x_-$ 、$x+vt$ を $x_+$ という新しい変数を定める。$x_-$ も $x_+$ も $x$ と $t$ の関数なので任意の関数 $F$ に対して、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}F &= \frac{\partial x_+}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x_+}F+\frac{\partial x_-}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x_-}F\\
&= \frac{\partial\left(x+vt\right)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x_+}F+\frac{\partial\left(x-vt\right)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x_-}F\\
&= \frac{\partial}{\partial x_+}F+\frac{\partial}{\partial x_-}F
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}F &= \frac{\partial x_+}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_+}F+\frac{\partial x_-}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_-}F\\
&= \frac{\partial\left(x+vt\right)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_+}F+\frac{\partial\left(x-vt\right)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_-}F\\
&= v\frac{\partial}{\partial x_+}F-v\frac{\partial}{\partial x_-}F
\end{aligned}$$

という関係式を用いて 3.99 を確認していく。$f\left(x_-\right)$ は $x_+$ によらないので

$$\frac{\partial}{\partial x} f\left(x_-\right)=\frac{\partial}{\partial x_+} f\left(x_-\right)+\frac{\partial}{\partial x_-} f\left(x_-\right)=\frac{\partial}{\partial x_-} f\left(x_-\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2} f\left(x_-\right)=\frac{\partial}{\partial x_-}\frac{\partial}{\partial x_-} f\left(x_-\right)=\frac{\partial^2}{\partial x_-^2} f\left(x_-\right)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f\left(x_-\right)=v\frac{\partial}{\partial x_+} f\left(x_-\right)-v\frac{\partial}{\partial x_-} f\left(x_-\right)=-v\frac{\partial}{\partial x_-} f\left(x_-\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2} f\left(x_-\right)=-v\frac{\partial}{\partial x_-}\left(-v\frac{\partial}{\partial x_-} f\left(x_-\right)\right)=v^2\frac{\partial^2}{\partial x_-^2} f\left(x_-\right)}$$

また $g\left(x_+\right)$ は $x_-$ によらないので

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2} g\left(x_+\right)=\frac{\partial}{\partial x_+}\frac{\partial}{\partial x_+} g\left(x_+\right)=\frac{\partial^2}{\partial x_+^2} g\left(x_+\right)}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2} g\left(x_+\right)=v\frac{\partial}{\partial x_+}\left(v\frac{\partial}{\partial x_+} g\left(x_+\right)\right)=v^2\frac{\partial^2}{\partial x_+^2} g\left(x_+\right)}$$

3.118 式を 3.99 式の左辺に代入する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi(x,t)&=\frac{\partial^2}{\partial t^2} f\left(x_-\right)+\frac{\partial^2}{\partial t^2} g\left(x_+\right)\\&=v^2\frac{\partial^2}{\partial x_-^2} f\left(x_-\right)+v^2\frac{\partial^2}{\partial x_+^2} g\left(x_+\right)\\&=v^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_-^2} f\left(x_-\right)+\frac{\partial^2}{\partial x_+^2} g\left(x_+\right)\right)\\&=v^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f\left(x_-\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2} g\left(x_+\right)\right)\\&=v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi(x,t)\end{aligned}$$

3.99 式の右辺が得られる。

<u>問 3.6</u>　$\xi\left(x,t\right)=f_1\left(x-vt\right)+g_1\left(x+vt\right)$、$\frac{\partial}{\partial x}\xi\left(x,t\right)=f_1'\left(x-vt\right)+g_1'\left(x+vt\right)$ に注意して

固定端の場合は$g_1(x) = -f_1(-x)$なので、

$$\xi(0,t) = f_1(-vt) + g_1(vt) = f_1(-vt) + \left(-f_1(-vt)\right) = 0$$

自由短の場合は$g_1(x) = f_1(-x) \Rightarrow g_1'(x) = -f_1'(-x)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\xi(0,t) = f_1'(-vt) + g_1'(vt) = f_1'(-vt) + \left(-f_1'(-vt)\right) = 0$$

<u>問 3.7</u>　試験範囲外なので省略。

# 4 章

<u>問 4.1</u>　区間 $(0,l)$ で定義された関数 $\tilde{f}(x)$ をフーリエ級数展開したい。（求めたいのは境界条件のない一般の関数。）定数関数と周期(波長) $l$ の三角関数（周期 $\frac{l}{2},\frac{l}{3},\ldots,\frac{l}{n}$ の関数も周期が $l$ の関数なのでこれらも足し合わせる）の和で表すので

$$\tilde{f}(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{2n\pi}{l}x\right)+B_n\sin\left(\frac{2n\pi}{l}x\right)\right]$$

で表される。さらに固有関数で表したい場合は $\tilde{e}_0(x)$ を定数だけの固有関数、$\tilde{e}_{2n-1}(x)$ を $\cos\left(\frac{2n\pi}{l}x\right)$ を含む固有関数、$\tilde{e}_{2n}(x)$ を $\sin\left(\frac{2n\pi}{l}x\right)$ を含む固有関数とすると、それぞれの $\int_{x=0}^{l}\left|\tilde{e}_i(x)\right|^2dx=1$ となるためには適当な係数を付けて

$$\tilde{e}_{2n-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{l}}、\ \tilde{e}_{2n-1}(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\left(\frac{2n\pi}{l}x\right)、\ \tilde{e}_{2n}(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{2n\pi}{l}x\right)$$

となり、関数 $\tilde{f}(x)$ は固有関数を使って表せば

$$\tilde{f}(x)=\frac{A_0}{2}\sqrt{l}\ \tilde{e}_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{l}{2}}\left[A_n\tilde{e}_{2n-1}(x)+B_n\tilde{e}_{2n}(x)\right]$$

になる。

<u>問 4.2</u>

（1）　三角関数の場合は固有関数を使うのはめんどくさいから使わないでおく。
これは奇数関数なので $A_0=A_1=\ldots=0$

$$\begin{aligned}B_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)f(x)dx\\&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{0}-\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx+\frac{1}{l}\int_{0}^{l}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx\\&=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx\end{aligned}$$

$$=\frac{2}{l}\frac{l}{n\pi}\left[-\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right]_0^l=\frac{2}{n\pi}\left(1-\cos n\pi\right)=\frac{2}{n\pi}\left(1-\left(-1\right)^n\right)$$

$n$が偶数の時はゼロになるので、$n=2k-1$と表すことで

$$f\left(x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\left(2k-1\right)\pi}\sin\left(\frac{\left(2k-1\right)\pi}{l}\right)$$

で表される。

（2） $f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2l}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{in\pi/l}$ で表すとき

$$\begin{aligned}
C_n &= \int_{-l}^{l}\frac{1}{\sqrt{2l}}e^{-in\pi x/l}f\left(x\right)dx \\
&= \int_{-l}^{0}-\frac{1}{\sqrt{2l}}e^{-in\pi x/l}dx+\int_{0}^{l}\frac{1}{\sqrt{2l}}e^{-in\pi x/l}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2l}}\frac{l}{in\pi}\left[e^{-in\pi x/l}\right]_{-l}^{0}-\frac{1}{\sqrt{2l}}\frac{l}{in\pi}\left[e^{-in\pi x/l}\right]_{0}^{l} \\
&= \frac{\sqrt{l}}{in\pi\sqrt{2}}\left(1-e^{in\pi}\right)-\frac{\sqrt{l}}{in\pi\sqrt{2}}\left(e^{-in\pi}-1\right) \\
&= \frac{\sqrt{l}}{in\pi\sqrt{2}}\left(2-e^{in\pi}-e^{-in\pi}\right) \\
&= \frac{\sqrt{l}}{in\pi\sqrt{2}}\left(2-2\cos n\pi\right) \qquad \left(\because \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2l}}{in\pi}\left(1-\left(-1\right)^n\right) \quad =-\frac{i\sqrt{2l}}{n\pi}\left(1-\left(-1\right)^n\right)
\end{aligned}$$

$n$が偶数の時はゼロになるので、$n=2k-1$と表すことで

$$f\left(x\right)=-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2i}{\left(2k-1\right)\pi}e^{in\pi/l} \qquad \left(=\frac{2}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(2k-1\right)}e^{i\left(n\pi/l-\pi/2\right)}\right)$$

で表される。

<u>問 4.3</u>

$$\xi\left(x,0\right)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

なので、$\int x\sin ax\, dx = -\frac{x\cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2} + C$（部分積分を使えば積分できる）を用いて

$$
\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{L}\int_0^L \xi(x,0)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \\
&= \frac{2}{L}\int_0^{x_0}\frac{x}{x_0}\xi_0\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx + \frac{2}{L}\int_{x_0}^{L}\left(1-\frac{x-x_0}{L-x_0}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \\
&= \frac{2\xi_0}{L}\left\{\int_0^{x_0}\frac{x}{x_0}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx + \int_{x_0}^{L}\left(\frac{L}{L-x_0}-\frac{x}{L-x_0}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\right\} \\
&= \frac{2\xi_0}{L}\left\{\left[-\frac{x\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}{x_0\frac{n\pi}{L}} + \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}{x_0\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}\right]_0^{x_0}\right. \\
&\qquad \left. + \left[-\frac{L}{L-x_0}\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \frac{x\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}{(L-x_0)\frac{n\pi}{L}} - \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}{(L-x_0)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}\right]_{x_0}^{L}\right\} \\
&= \frac{2\xi_0}{L}\left\{-\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) + \frac{1}{x_0}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) - \frac{L}{n\pi}\frac{L}{L-x_0}\cos n\pi\right. \\
&\qquad \left. + \frac{L}{n\pi}\frac{L}{L-x_0}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) + \frac{L^2}{n\pi}\frac{\cos n\pi}{(L-x_0)} - \frac{L}{n\pi}\frac{x_0\cos\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right)}{(L-x_0)} + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right)}{(L-x_0)}\right\} \\
&= \frac{2\xi_0}{n\pi}\left\{\cancel{-\cos\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right)} + \frac{1}{x_0}\frac{L}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) \cancel{- \frac{L}{L-x_0}\cos n\pi}\right. \\
&\qquad \left. \cancel{+ \frac{L}{L-x_0}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right)} \cancel{+ L\frac{\cos n\pi}{(L-x_0)}} \cancel{- \frac{x_0\cos\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right)}{(L-x_0)}} + \frac{L}{n\pi}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right)}{(L-x_0)}\right\} \\
&= \frac{2\xi_0}{n\pi}\left\{\frac{1}{x_0}\frac{L}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) + \frac{L}{n\pi}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right)}{(L-x_0)}\right\} \\
&= \frac{2\xi_0 L^2}{n^2\pi^2 x_0(L-x_0)}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right)
\end{aligned}
$$

疲れた！（－－”）

問 4.4　問題文があまり分からないけどyについて積分するよね？

$$\frac{1}{\pi}\int_{x_1}^{x_2}\lim_{K\to\infty}\frac{\sin K(y-x)}{y-x}dy$$
$$=\frac{1}{\pi}\lim_{K\to\infty}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sin K(y-x)}{y-x}dy$$

$(Y\equiv y-x$ とおく$)$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{K\to\infty}\int_{x_1-x}^{x_2-x}\frac{\sin KY}{Y}dY$$

この積分は$Y=0$の領域が含まれていたら、$K\to\infty$の場合は波長が小さくて、各山の幅と次の谷の振幅がほぼ等しいので符号付面積打ち消しあい、$Y\neq 0$のところには積分が０と考えていい。

（証明が欲しい人には次の方法を用いればよい。半波長の領域で関数を振幅不変の三角関数に近似する。$Y=Y_0$のところに$1/Y_0$の振幅の山の面積と隣の$1/(Y_0+\pi/K)$の振幅の谷の面積の差をとり、$1/(Y_0+2\pi/K)$の振幅の山と$1/(Y_0+3\pi/K)$の振幅の谷の面積の差をとり、それを繰り返して無限大までそれらの差を足していき、$K\to\infty$の極限を取り Riemann 積分を用いると、$Y_0\neq 0$という条件であれば値はゼロになることが確かめられる。）

だから

$$\approx\frac{1}{\pi}\lim_{K\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin KY}{Y}dY$$

4.38 式の公式を用いると

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{K\to\infty}\pi=1$$

になる。

# 5 章

<u>問 5.1</u>　$v_{\mathrm{Al}}=\sqrt{\dfrac{K}{\rho}}=\sqrt{\dfrac{7.55\times10^{10}\,\mathrm{Pa}}{2.69\times10^{3}\,\mathrm{kg/m^3}}}=5.30\times10^{3}\ \mathrm{m/s}$

$$v_{水}=\sqrt{\frac{K}{\rho}}=\sqrt{\frac{1}{\rho\kappa}}=\sqrt{\frac{1}{\left(1.00\times10^{3}\,\mathrm{kg/m^3}\right)\left(0.45\times10^{-9}\,\mathrm{Pa}\right)}}=1.49\times10^{3}\ \mathrm{m/s}$$

<u>問 5.2</u>　２つの方法を紹介しましょう。

（１）直交座標系$(x,y,z)$と用いる場合

$$\nabla p=\frac{\partial p}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial p}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial p}{\partial z}\hat{k}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}\hat{i}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos\left(k\sqrt{x^2+y^2+z^2}-\omega t\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\hat{i}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\dfrac{\partial}{\partial x}\cos\left(k\sqrt{x^2+y^2+z^2}-\omega t\right)-\cos\left(k\sqrt{x^2+y^2+z^2}-\omega t\right)\dfrac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}\hat{i}$$

$$=\frac{-kx\sin\left(k\sqrt{x^2+y^2+z^2}-\omega t\right)-\cos\left(k\sqrt{x^2+y^2+z^2}-\omega t\right)\left(x\big/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{x^2+y^2+z^2}\hat{i}$$

$$=-\frac{k\sin(kr-\omega t)+\cos(kr-\omega t)/r}{r^2}x\hat{i}$$

より、$y$、$z$成分も同様に

$$\frac{\partial p}{\partial y}\hat{j}=-\frac{k\sin(kr-\omega t)+\cos(kr-\omega t)/r}{r^2}y\hat{j}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}\hat{k}=-\frac{k\sin(kr-\omega t)+\cos(kr-\omega t)/r}{r^2}z\hat{k}$$

従って

$$\nabla p=-\frac{k\sin(kr-\omega t)+\cos(kr-\omega t)/r}{r^2}\left(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right)$$

$$=-\frac{k\sin(kr-\omega t)+\cos(kr-\omega t)/r}{r^2}\boldsymbol{r}$$

（２）極座標$(r,\theta,\phi)$を用いる場合

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \phi}\hat{\phi} \qquad \text{（公式）}$$

$p = \dfrac{\cos(kr-\omega t)}{r}$ なので、$\theta$ にも $\phi$ にも依存しないので

$$\begin{aligned}\nabla p &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos(kr-\omega t)}{r}\right)\hat{r} \\ &= \frac{-kr\sin(kr-\omega t)-\cos(kr-\omega t)}{r^2}\hat{r} \\ &= \frac{-k\sin(kr-\omega t)-\cos(kr-\omega t)/r}{r^2}\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

（注意：後者の方が明らかに簡単ですが、注意しなければならないことがある。grad と div は直交座標では同じような形をしているが極座標は異なる形です。任意のスカラー $p$ とベクトル $\boldsymbol{A}$ に対して

$$\begin{aligned}\nabla p = \mathrm{grad}\, p &= \frac{\partial p}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k} \\ &= \frac{\partial p}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \phi}\hat{\phi} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{A} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial A_r r^2}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta \sin\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\end{aligned}$$

また、この場合は $r$ にしか依存しないが、問題を $p = \dfrac{\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}{r}$ （少し変な平面波）に変えたら、$r$ にしか依存しないように見えるが、内積のところに $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{r}$ の角度が含まれているので $r$ の他に何かの変数が入ってしまい、簡単には解けなくなる。この場合は角度成分を考慮しないといけない。）

<u>問 5.3</u>

$$\mathrm{div}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{\xi} = \mathrm{div}\left(v^2\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\ \boldsymbol{\xi}\right)\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{div}\boldsymbol{\xi} = v^2\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\ \boldsymbol{\xi}\right)\right)$$

$p = -K\ \mathrm{div}\boldsymbol{\xi}$ より

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}K\mathrm{div}\boldsymbol{\xi}=v^2\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\left(K\mathrm{div}\ \boldsymbol{\xi}\right)\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}p=v^2\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\ p\right)=v^2\Delta p$$

<u>問 5.4</u>

$$\frac{\partial^2\xi_r}{\partial t^2}=-\omega^2\left(\frac{A}{Kkr}\cos\left(kr-\omega t\right)-\frac{A}{Kk^2r^2}\sin\left(kr-\omega t\right)\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\xi_r\right)\right]&=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Ar}{Kk}\cos\left(kr-\omega t\right)-\frac{A}{Kk^2}\sin\left(kr-\omega t\right)\right)\right]\\&=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2}\left(-\frac{Ar}{Kk}k\sin\left(kr-\omega t\right)-\frac{A}{Kk^2}k\cos\left(kr-\omega t\right)\right)\right]\\&=\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{A}{Kr}\sin\left(kr-\omega t\right)-\frac{A}{Kkr^2}\cos\left(kr-\omega t\right)\right)\\&=-\frac{A}{Kr}k\cos\left(kr-\omega t\right)+\frac{A}{Kr^2}\sin\left(kr-\omega t\right)\\&=-k^2\left(\frac{A}{Kkr}\cos\left(kr-\omega t\right)-\frac{A}{Kk^2r^2}\sin\left(kr-\omega t\right)\right)\\&=-\frac{\omega^2}{v^2}\left(\frac{A}{Kkr}\cos\left(kr-\omega t\right)-\frac{A}{Kk^2r^2}\sin\left(kr-\omega t\right)\right)\\&=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi_r}{\partial t^2}\end{aligned}$$

$$\therefore\frac{\partial^2\xi_r}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\xi_r\right)\right]$$

<u>問 5.5</u>、<u>問 5.6</u>、<u>問 5.7</u> は試験範囲外なので省略

# 6 章

問 6.1

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2k^2+ibk}dk = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2k^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(ibk)^n dk$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(ib)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2k^2}k^n dk$$

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2k^2}k^n dk$ の積分値は$n$が奇数のときに奇数関数の積分になり０になる。従って$n$が偶数のときだけ考えてもいい。

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(ib)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2k^2}k^n dk = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m)!}(ib)^{2m}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2k^2}k^{2m}dk$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{b^{2m}}{(2m)!}\frac{(2m-1)!!}{2^m}\frac{\sqrt{\pi}}{a^{2m+1}}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sqrt{\pi}}{a}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!}\left(-\frac{b^2}{2a^2}\right)^m$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{a}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right)^m$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-\frac{b^2}{4a^2}}$$

$$\left(\frac{(2m-1)!!}{(2m)!} = \frac{\cancel{1}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{7}\cdot\ldots\cdot\cancel{(2m-1)}}{\cancel{1}\cdot 2\cdot\cancel{3}\cdot 4\cdot\cancel{5}\cdot\ldots\cdot\cancel{(2m-1)}\cdot 2m} = \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2m} = \frac{1}{2^m}\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m} = \frac{1}{2^m m!}\right)$$

問 6.2

（１）　この波の振幅が一様分布であるため

$$(\Delta x)^2 = \frac{\int_{v_gt-L/2}^{v_gt+L/2}(x-v_gt)^2 A^2 dx}{\int_{v_gt-L/2}^{v_gt+L/2}A^2 dx}$$
$$= \frac{\int_{v_gt-L/2}^{v_gt+L/2}(x-v_gt)^2 dx}{L}$$
$$= \frac{1}{L}\left[\frac{1}{3}(x-v_gt)^3\right]_{v_gt-L/2}^{v_gt+L/2}$$

$$=\frac{L^2}{12}$$

$$\Delta x=\frac{L}{\sqrt{12}}$$

（２）波数のばらつき $g(k)$ を求めよう。$t=0$ のフーリエ変換から

$$g(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-L/2}^{L/2}Ae^{ik_0x}e^{-ikx}dx$$

$$=\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{i(k_0-k)}\left[e^{i(k_0-k)x}\right]_{-L/2}^{L/2}$$

$$=\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{(k_0-k)}\left(\frac{e^{i(k_0-k)\frac{L}{2}}-e^{-i(k_0-k)\frac{L}{2}}}{2i}\right)$$

$$=\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{(k_0-k)}\sin\left((k_0-k)\frac{L}{2}\right)$$

$$(\Delta k)^2=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}(k-k_0)^2\left(\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{(k_0-k)}\sin\left((k_0-k)\frac{L}{2}\right)\right)^2dx}{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{(k_0-k)}\sin\left((k_0-k)\frac{L}{2}\right)\right)^2dx}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\sin^2 k\frac{L}{2}\quad dk}{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sin k\frac{L}{2}\right)^2dk}$$

分母は有限である。

$$\because\quad \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sin k\frac{L}{2}\right)^2dk=2\left(\int_0^{2\pi/L}\left(\frac{1}{k}\sin k\frac{L}{2}\right)^2dk+\int_{2\pi/L}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sin k\frac{L}{2}\right)^2dk\right)$$

$$<2\left(\int_0^{2\pi/L}\left(\frac{L}{2}\right)^2dk+\int_{2\pi/L}^{\infty}\frac{1}{k^2}dk\right)=\pi L+\frac{L}{2\pi}<2\pi L$$

分子は無限大である。

$$\because\quad \int_{-\infty}^{\infty}\sin^2 k\frac{L}{2}\quad dk=2\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_{2n\pi/L}^{2(n+1)\pi/L}\sin^2 k\frac{L}{2}\quad dk=2\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{\pi}{L}=\infty$$

従って、$(\Delta k)^2$ は無限大である。

問 6.3

$$e^{i(kr-\omega t)}\sum_{n=1}^{N}e^{i\phi_n}=e^{i(kr-\omega t)}e^{-i\frac{1}{2}ka\sin\theta}\sum_{n=1}^{N}e^{in\frac{ka\sin\theta}{N}}$$

$$=e^{i(kr-\omega t)}e^{-i\frac{1}{2}ka\sin\theta}e^{i\frac{ka\sin\theta}{N}}\frac{1-e^{ika\sin\theta}}{1-e^{\frac{ika\sin\theta}{N}}}$$

$$=e^{i(kr-\omega t)}e^{i\frac{ka\sin\theta}{2N}}\frac{e^{-i\frac{1}{2}ka\sin\theta}-e^{i\frac{1}{2}ka\sin\theta}}{e^{-\frac{ika\sin\theta}{2N}}-e^{\frac{ika\sin\theta}{2N}}}$$

$$=e^{i(kr-\omega t)}e^{i\frac{ka\sin\theta}{2N}}\frac{\sin(ka\sin\theta/2)}{\sin(ka\sin\theta/2N)}$$

$$\lim_{N\to\infty}\mathrm{Re}\left[e^{i(kr-\omega t)}\sum_{n=1}^{N}e^{i\phi_n}\right]=\lim_{N\to\infty}\mathrm{Re}\left[e^{i(kr-\omega t)}e^{i\frac{ka\sin\theta}{2N}}\frac{\sin(ka\sin\theta/2)}{\sin(ka\sin\theta/2N)}\right]$$

$$=\lim_{N\to\infty}\cos\left(kr-\omega t+\frac{ka\sin\theta}{2N}\right)\frac{\sin(ka\sin\theta/2)}{\sin(ka\sin\theta/2N)}$$

$$=\cos(kr-\omega t)\lim_{N\to\infty}\frac{2N\sin(ka\sin\theta/2)}{ka\sin\theta}$$

従って、振幅は$\dfrac{\sin(ka\sin\theta/2)}{ka\sin\theta}$に比例する。

（上の残った $N$ は、実際一定の振幅を持つ光を細かく分解すればするほど分解された光の振幅が $N$ に反比例するのでそれを考慮するとこの式の $N$ は消される。）

問 6.4

分解能　$\theta=\dfrac{1\ \mathrm{m}}{490{,}000\ \mathrm{m}}=2.04\times10^{-6}\ \mathrm{rad}$

$\theta\simeq\dfrac{\lambda}{D}$ より　$D\simeq\dfrac{\lambda}{\theta}\simeq\dfrac{500\times10^{-7}}{2.04\times10^{-6}}\mathrm{cm}\ =25\ \mathrm{cm}$

問 6.5

$f(y)$は周期 $d$ の、$0\le y\le a$ で１、$a<y<d$ で０、の関数なので 4.26 式を参考にして

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{i\frac{2\pi n}{d}y}$$

と書ける。（4.26 式では周期はこの問題の 2 倍である）6.59 式に代入すると

$$\xi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{\sqrt{d}}\mathrm{Re}\left[\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{i\left(k_x x+\frac{2\pi n}{d}y-\omega t\right)}\right]$$

従って許される$k_y$は$\dfrac{2n\pi}{d}\left(n\in\mathbb{R}\right)$のみである。