チャム

授業で説明が足りなかったと思われる部分を説明するものです。もう分かった人は読まなくてもいいです。(時間がかかるし)

<u>複素数の指数関数表示</u>　　　　<u>直交性と完全性</u>

複素数の指数関数表示

授業では突然$e^{i\theta}$を使ったりしているけど先生は十分説明していなくてみんなあまり分からないかなと思っている。

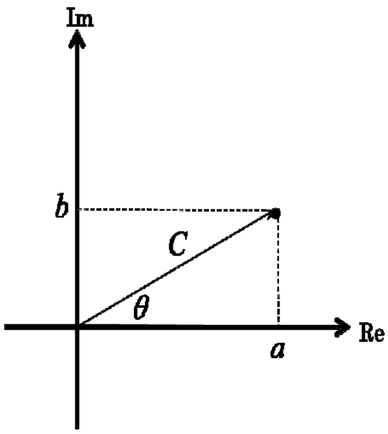
なぜ$e^{i\theta}$を使うだろうか？　まず定義から始まりましょう～

普通の複素数は$a+bi$で表すでしょうね。でも表し方は不便なところがあって例えば$\left(1+i\sqrt{3}\right)^{97}$を計算しなさいと言われたときは困るだろう。

もう一つの表し方は「指数関数表示」または「極座標表示」というもので、複素数$a+bi$を複素平面（実部を横軸、虚部を縦軸）で表すときの位置ベクトルの大きさC、実部となす角度θを用いて

$$a+bi=Ce^{i\theta}$$

と書ける。図を見ると



$$\boxed{a+bi=\sqrt{a^2+b^2}\,e^{i\arctan b/a}}$$

が分かるでしょう。$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$を使って確認したら

$$a+bi=Ce^{i\theta}=C\cos\theta+iC\sin\theta$$

となり、$Ce^{i\theta}$の実部成分がa、虚部成分がbという期待した結果が出ました。

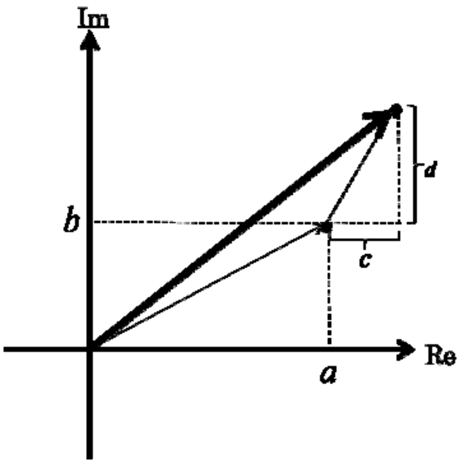
まとめると、$Ce^{i\theta}$という複素数の表し方はCが大きさθが角度です。

前の問題$\left(1+i\sqrt{3}\right)^{97}$の例を見ましょう。これを複素平面上にかくと長さ$\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}$

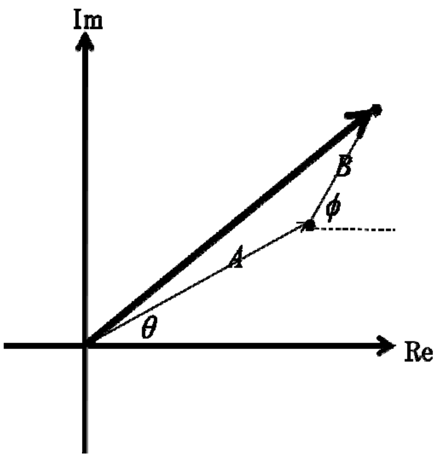
$=2$と角度$\arctan\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{3}$なので、$\left(1+i\sqrt{3}\right)^{97}=\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{97}=2^{97}e^{i\frac{97\pi}{3}}$で角度$\dfrac{97\pi}{3}$は$32\pi+\dfrac{\pi}{3}$

なので$2^{97}e^{i\frac{97\pi}{3}}=2^{97}e^{i\frac{\pi}{3}}=2^{96}\left(1+i\sqrt{2}\right)$になります。

さらにこの極座標表示は足し算もできます。普通の複素数の足し算は実部と実部、虚部と虚部、$\left(a+bi\right)+\left(c+di\right)=\left(a+c\right)+\left(b+d\right)i$と同様に極座標表示もベクトルの足し算を使います。（足した太いベクトルの横軸成分はもともとのベクトルの横軸成分の和ですね。縦軸のほうも同様。）



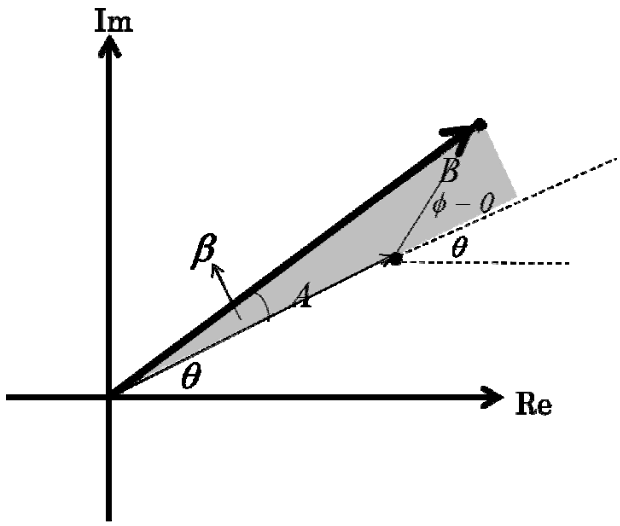
$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=Ae^{i\theta}+Be^{i\phi}$を考えていきましょう。つまり足した太いベクトルの大きさと角度を求めれば良いわけです。



2本のベクトルが互いになす角度は$\phi-\theta$なので、cosine の定理を用いて足した太いベクトルの大きさは

$$\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos(\phi-\theta)}$$

で、横軸となす角度は $\arctan\dfrac{A\sin\theta+B\sin\phi}{A\cos\theta+B\cos\phi}$ のままでいいですが、それあまり美しくないので、太いベクトルの角度を $\boldsymbol{A}$ との相対角度で表しましょう。



　太いベクトルの角度は図で示したとおり、$\theta+\beta$ です。だから β を求めればいいです。灰色の直角三角形を見ながら β を求めましょう。この三角形の高さは $B\sin(\phi-\theta)$ で、舌の辺の長さは $A+B\cos(\phi-\theta)$ なので、$\tan\beta=\dfrac{B\sin(\phi-\theta)}{A+B\cos(\phi-\theta)}$ です。

　従って、

$$Ae^{i\theta}+Be^{i\phi}=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos(\phi-\theta)}\ e^{i\left(\theta+\arctan\frac{B\sin(\phi-\theta)}{A+B\cos(\phi-\theta)}\right)}$$

となり、2.14 式から 2.19 式 2.20 式 2.21 式まで導く過程を詳しく説明しました。

　で、ときどき三角関数になっているのになぜ複素数にして頭を痛くなること以外は何も役に立たないじゃないかと思う人がいるかもしれませんが、実は、三角関数の和は計算しにくいでしょう。しかしベクトルの和は簡単ですね。ただベクトルの後端を他のベクトルの先端につけるだけで済む。だから三角関数⇒ベクトル（複素数）の間の変換を使用して問題を解いたほうが簡単です。分かりやすい例は

$$\cos 0+\cos\frac{2\pi\cdot 1}{199}+\cos\frac{2\pi\cdot 2}{199}+\cos\frac{2\pi\cdot 3}{199}+...+\cos\frac{2\pi\cdot 198}{199}$$

を考えましょう。三角関数で考えるとプラスとマイナスのペアを足してゼロになることが分かりましがベクトルで考えましょう。各項 $\cos\dfrac{2\pi\cdot i}{199}$ は長さ 1 で x 軸（実軸）となす角度

$\frac{2\pi \cdot i}{199}$ のベクトルの x 成分（実部成分）ですね。<u>全てのベクトルを足してから x 成分（実部成分）をとるものとは全てのベクトルの x 成分（実部成分）を足した結果に等しい</u>ので、全てのベクトルの和を考えたら 199 個のベクトルが繋げて 199 角形になる。だから全てのベクトルを足したら 0 ベクトルになり、x 成分（実部成分）も 0 になるのです。

2.11 式も 2 項あるものから 1 項にしたい場合は、三角関数の基礎が強い人は直接できると思いますが、初めてやったらめんどいことがあるはずです。だから 2.11 式の結果（複素数の実部成分の総和）が 2.14 式の和の実部成分（複素数の総和の実成分）に等しいはずだから 2.14 を計算して、2.17 式が得られて、実部成分だけを取り出して 2.21 式になるのです。

直交性と完全性

ベクトルの直交性は簡単でその内積が 0 ならそれを直交性という。練習問題 2.3 の固有ベクトルの組の直交性を試してみよう。

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

直交性を試すために異なるベクトルの同じ成分の積の総和を考える（つまり縦の方向を掛けて横の方向に足す)。上と真ん中のものの直交性を確認する。

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)(0)+\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$$

上と下のペア、真ん中と下のペアも確認したら 0 になる。

完全性は同じベクトルの異なる成分の積の総和である（つまり横の方向を掛けて縦の方向に足す)。第一成分と第二成分を考える。

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(0)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0$$

第二成分と第三成分のペア、第一成分と第三成分のペアも確認すればちゃんと 0 になってくれる。