積分学

g040217 理１-１０組　加藤進介

2010 年６月３日

微分積分学の基本定理

1　不定積分

閉区間 [a,b] 上で連続の生の値をとる関数 $y=f(x)$ のグラフを描いたとき、グラフと x 軸と直線 $x=a$ と直線 $x=x$ で囲まれた部分の面積を $S(x)$ とおく。これを x の関数と考える。h¿0 を小さい数として $S(x+h)$ を考えると、x の周りでの $f(x)$ の増減に従って

$$hf(x) \leqq S(x+h)-S(x) \leqq hf(x+h)$$

か、または

$$hf(x) \geqq S(x+h)-S(x) \geqq hf(x+h)$$

が成り立つ。

したがって

$$f(x) \leqq \frac{S(x+h)-S(x)}{h} \leqq f(x+h)$$

または

$$f(x) \geqq \frac{S(x+h)-S(x)}{h} \geqq f(x+h)$$

となる。ここで h → 0 とすることにより

$$\frac{S(x+h)-S(x)}{h} \to f(x)(h \to +0)$$

が得られる。h < 0 のときも同様に

$$\frac{S(x+h)-S(x)}{h} \to f(x)(h \to -0)$$

が得られ、合わせて

$$\frac{S(x+h)-S(x)}{h} \to f(x)(h \to 0)$$

となる。すなわち $S(x)$ は微分可能で $S'(x)=f(x)$ である。

一般に、関数 $f(x)$ に対し $F'(x)=f(x)$ となる（微分可能な）関数 $F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**または**不定積分**とよび、ライプニッツの記号で

$$F(x)=\int f(x)dx$$

と書く。原始関数は存在するとは限らない。また、存在してもただ一つではない。実際、$G(x)$ を $f(x)$ の他の原始関数とすると

$$\frac{d(G(x)-F(x))}{dx}=\frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dx}=f(x)-f(x)=0$$

ゆえ、$G(x)-F(x)=C$ は定数関数となり

$$G(x)=F(x)+C(C\text{ は定数})$$

と書ける。逆に、$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とするとき、$F(x)+C$（C は定数）も $f(x)$ の原始関数である。

2　定積分

もとにもどって、$f(x)$ が [a,b] で連続で正の値をとるとき、面積 $S(x)$ は原始関数である。$f(x)$ の他の原始関数 $F(x)$ は $F(x) = S(x) + C$（C は定数）と書ける。ここで $x = a$ とおくと $S(a) = 0$ ゆえ $F(a) = C$。また $x = b$ とおくと $F(b) = S(b) + C = S(b) + F(a)$。ゆえに

$$S(b) = F(b) - F(a)$$

この式の両辺を、しばしば $[F(x)]_a^b$ と書く。b の代わりに x を用いると

$$S(x) = F(x) - F(a) = [F(x)]_a^x$$

面積 $S(b)$ は、これもライプニッツの記号で

$$\int_a^b f(x)dx$$

とあらわされ、$f(x)$ の**定積分**とよばれる。

参考文献

[1]　著:難波誠　**微分積分学** *1996* 裳華房