

P/25 (19)

鏡像法を用いる.

点電荷 q の鏡像電荷仮想電荷 $-q'$ を用いる. $-q'$ が P' にあつて、球上の点 A において電位 ϕ は、

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{q}{|PA|} - \frac{q'}{|PA|} \right)$$

球面上で $\phi = 0$ として、 $\frac{P'A}{PA} = \frac{q'}{q}$ よって、線分 PP' を $q:q'$ に内分する点 O とする.これが球面に一致するので、アポロニウスの円と対称性を考え、 P は球面 OP 上かつ、

$$|OP| \cdot |OP'| = a^2$$

$$\therefore |OP'| = \frac{a^2}{d}$$

である. このとき、 OP と球面の電位を考えると、

$$0 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{q}{d-a} - \frac{q'}{a-\frac{a^2}{d}} \right)$$

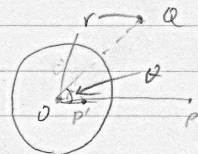
$$\therefore q' = q \frac{a}{d}$$

以下 球を仮想電荷 q' とおきかえて、点電荷 q が与える力は、

$$\begin{aligned} F &= \frac{q(-q')}{4\pi\epsilon |PP'|^2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon} \frac{a}{d} \frac{d^2}{(d^2-a^2)^2} \\ &= -\frac{q^2}{4\pi\epsilon} \frac{ad}{(d^2-a^2)^2} \end{aligned}$$

球外の点 Q の静電ポテンシャル V は、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{q}{|PQ|} - \frac{q'}{|P'Q|} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{|PQ|} - \frac{a}{d|PQ|} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}} - \frac{a}{d\sqrt{r^2+\left(\frac{a^2}{d}\right)^2-2r\frac{a^2}{d}\cos\theta}} \right) \end{aligned}$$

(右図のよき $\angle QOP = \theta$ $|QO| = r$ とした)球面上で誘電したる電荷密度 σ は $\sigma = \epsilon \left(-\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=a}$

$$\sigma = \frac{q}{4\pi} \left(\frac{a-d\cos\theta}{(a^2+d^2-2ad\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{a}{d} \frac{a-\frac{a^2}{d}\cos\theta}{(a^2+\left(\frac{a^2}{d}\right)^2-2\frac{a^3}{d}\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$= -\frac{q}{4\pi a} \frac{d^2-a^2}{(a^2+d^2-2ad\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{q}{4\pi a} \frac{d^2-a^2}{|PQ|^3}$$

$$\left(\begin{array}{l} Q' \text{ は球上の点, } \angle Q'O P = \theta \\ P'Q' = \sqrt{a^2+d^2-2ad\cos\theta} \end{array} \right)$$

また球上に現れる電荷は、 $-\frac{a}{d}q$ (σ を積分しても得られる)