1 P61 [4]

粒子の初速 $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \\ 0 \end{pmatrix}$ 速度 $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ 位置 $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$

とおく。

このとき、運動方程式は、

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = e \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix} + e \cdot \vec{v} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \dfrac{d^2 r_x}{dt^2} = e v_y B & \cdots ① \\ m \dfrac{d^2 r_y}{dt^2} = eE - e v_x B & \cdots ② \\ m \dfrac{d^2 r_z}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

よって z 軸方向に関しては加速度 $\frac{d^2 r_z}{dt^2} = 0$ と、初速 $\vec{v}_0$ の z 軸成分が 0 なので、

$v_z = 0$ 、原点から出発するので、$r_z = 0$

また、② $\Leftrightarrow$ $v_x = -\dfrac{m}{eB}\dfrac{dv_y}{dt} + \dfrac{E}{B}$

①に代入して、$m\left(-\dfrac{m}{eB}\dfrac{d^2 v_y}{dt^2}\right) = eB v_y$

$\therefore \dfrac{d^2 v_y}{dt^2} = -\left(\dfrac{eB}{m}\right)^2 v_y$

ここで $v_y = A\cos\omega t$ とおいて解くと $\omega = \dfrac{eB}{m}$

よって、$v_y = A\cos\left(\dfrac{eB}{m}t + \phi\right)$

$v_x = A\sin\left(\dfrac{eB}{m}t + \phi\right) + \dfrac{E}{B}$

$\left(A, \phi : 定数 \right.$, 初期条件より、$A\cos\phi = v_{0y}$ $\left. A\sin\phi + \frac{E}{B} = v_{0x} \right)$

よって、$r_x = -A\dfrac{m}{eB}\cos\left(\dfrac{eB}{m}t + \phi\right) + \dfrac{E}{B}t + C_x$

$r_y = A\dfrac{m}{eB}\sin\left(\dfrac{eB}{m}t + \phi\right) + C_y$

$(C_x, C_y$ 定数$)$

ここで、初期条件より $t = 0$ で $r_x = r_y = 0$, よって $C_x = A\dfrac{m}{eB}\cos\phi$ $C_y = -A\dfrac{m}{eB}\sin\phi$

よって、$r_x = -A\dfrac{m}{eB}\cos\left(\dfrac{eB}{m}t + \phi\right) + \dfrac{E}{B}t + A\dfrac{m}{eB}\cos\phi$

$r_y = A\dfrac{m}{eB}\sin\left(\dfrac{eB}{m}t + \phi\right) - A\dfrac{m}{eB}\sin\phi$

ここで、このとき $t = \dfrac{m}{eB}2\pi \cdot n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を代入すると、

$r_x = \dfrac{E}{eB^2}2\pi \cdot n$

$r_y = 0$

となり x 軸上の点 $\left(\dfrac{E}{eB^2}2\pi \cdot n, 0\right)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を粒子は通るが、

これは初速度によらない。

以上より、粒子は初速度によらず x 軸上の $\left(\dfrac{E}{eB^2}2\pi \cdot n, 0\right)$ $(n = 1, 2, \cdots)$

を必ず通ることが示された //

(つまり集束している)