P.61 (4) 初速度 $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ 位置 $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$ とする。

このとき、電場はy方向にのみかかっているため、電場による力はy方向である。

また、磁場はz方向にのみかかっているから、磁場による力はx方向とy方向である。

よって、z方向にかかる力は存在しないため、$v_z = 0$, $r_z = 0$ である。

よって、x方向とy方向について運動方程式をたてると、

$$\begin{cases} m \cdot \dfrac{d^2 r_x{}^2}{dt^2} = e v_y B \\ m \cdot \dfrac{d^2 r_y{}^2}{dt^2} = eE - e v_x B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \cdot \dfrac{dv_x}{dt} = e v_y B & \text{——①} \\ m \cdot \dfrac{dv_y}{dt} = eE - e v_x B & \text{——②} \end{cases}$$

②より、$v_x = \dfrac{E}{B} - \dfrac{m}{eB} \dfrac{dv_y}{dt}$ よって、$\dfrac{dv_x}{dt} = -\dfrac{m}{eB} \cdot \dfrac{d^2 v_y}{dt^2}$

∴ ①に代入して、$\dfrac{m^2}{eB} \cdot \dfrac{d^2 v_y}{dt^2} + eB v_y = 0$

よって、$\begin{cases} v_y = C_1 \cos\left(\dfrac{eB}{m} t + \alpha_1\right) \\ v_x = \dfrac{E}{B} + C_1 \sin\left(\dfrac{eB}{m} t + \alpha_1\right) \end{cases}$ （C_1, α_1 は任意定数）

よって、$\begin{cases} r_x = -C_1 \dfrac{m}{eB} \cos\left(\dfrac{eB}{m} t + \alpha_1\right) + \dfrac{E}{B} t + C_2 \\ r_y = C_1 \dfrac{m}{eB} \sin\left(\dfrac{eB}{m} t + \alpha_1\right) + C_3 \end{cases}$ （C_2, C_3 は任意定数）

$t=0$ で、$r_x = 0$, $r_y = 0$ より、$C_2 = C_1 \dfrac{m}{eB} \cos\alpha_1$, $C_3 = -C_1 \dfrac{m}{eB} \sin\alpha_1$

ここで、$t = \frac{m}{eB} \cdot 2\pi n$ （nは自然数）を考えると、

$r_x = \frac{Em}{eB^2} \cdot 2\pi n$, $r_y = 0$ であり、

これは初速度に依存しない。

以上より、粒子はx軸上の点 $\left(\frac{Em}{eB^2} \cdot 2\pi n, 0, 0 \right)$ を通る。

(Q.E.D.)

P.81 (3)　Stefan-Boltzmanの法則により、熱放射によるエネルギーは、

$$\sigma T^4 \ [\mathrm{W/m^2}]$$

よって、フィラメントの表面積をSとすると、これが消費電力に等しくなるから、　$S \cdot \sigma T^4 = IV$ ——①

また、題意より、$R = kT$

よって、①$\Leftrightarrow$ $T^4 = \dfrac{V}{S\sigma} \cdot \dfrac{V}{R}$

$$\Leftrightarrow T^5 = \frac{V^2}{kS\sigma}$$

$$\Leftrightarrow T = \left(\frac{1}{kS\sigma}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot V^{\frac{2}{5}} \quad (\mathrm{Q.E.D.})$$

また、①より、$I = \dfrac{S\sigma T^4}{V} = S\sigma\left(\dfrac{1}{kS\sigma}\right)^{\frac{4}{5}} \cdot V^{\frac{3}{5}}$ (Q.E.D.)

P.123 (1) 静電ポテンシャル $\phi(\vec{r}) = \dfrac{e^{-\frac{r}{a}}}{r} = \dfrac{e^{-\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{a}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ とおくと、

Poissonの方程式より、$\Delta \phi(\vec{r}) = -\dfrac{1}{\varepsilon}\rho_e(\vec{r})$

よって、求める電荷分布は、

$$\rho_e(\vec{r}) = -\varepsilon \Delta \phi(\vec{r})$$

$$= -\varepsilon\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(\vec{r}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(\vec{r}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi(\vec{r})\right)$$

ここで、$\dfrac{\partial}{\partial x}\phi(\vec{r}) = \dfrac{-e^{-\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{a}}}{x^2+y^2+z^2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)x$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(\vec{r}) = \frac{e^{-\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{a}}\left(\frac{x}{a}\sqrt{x^2+y^2+z^2} + 2x\right)}{(x^2+y^2+z^2)^2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)x$$

$$+ \frac{e^{-\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{a}}}{x^2+y^2+z^2}\,\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot x$$

$$- \frac{e^{-\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{a}}}{x^2+y^2+z^2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

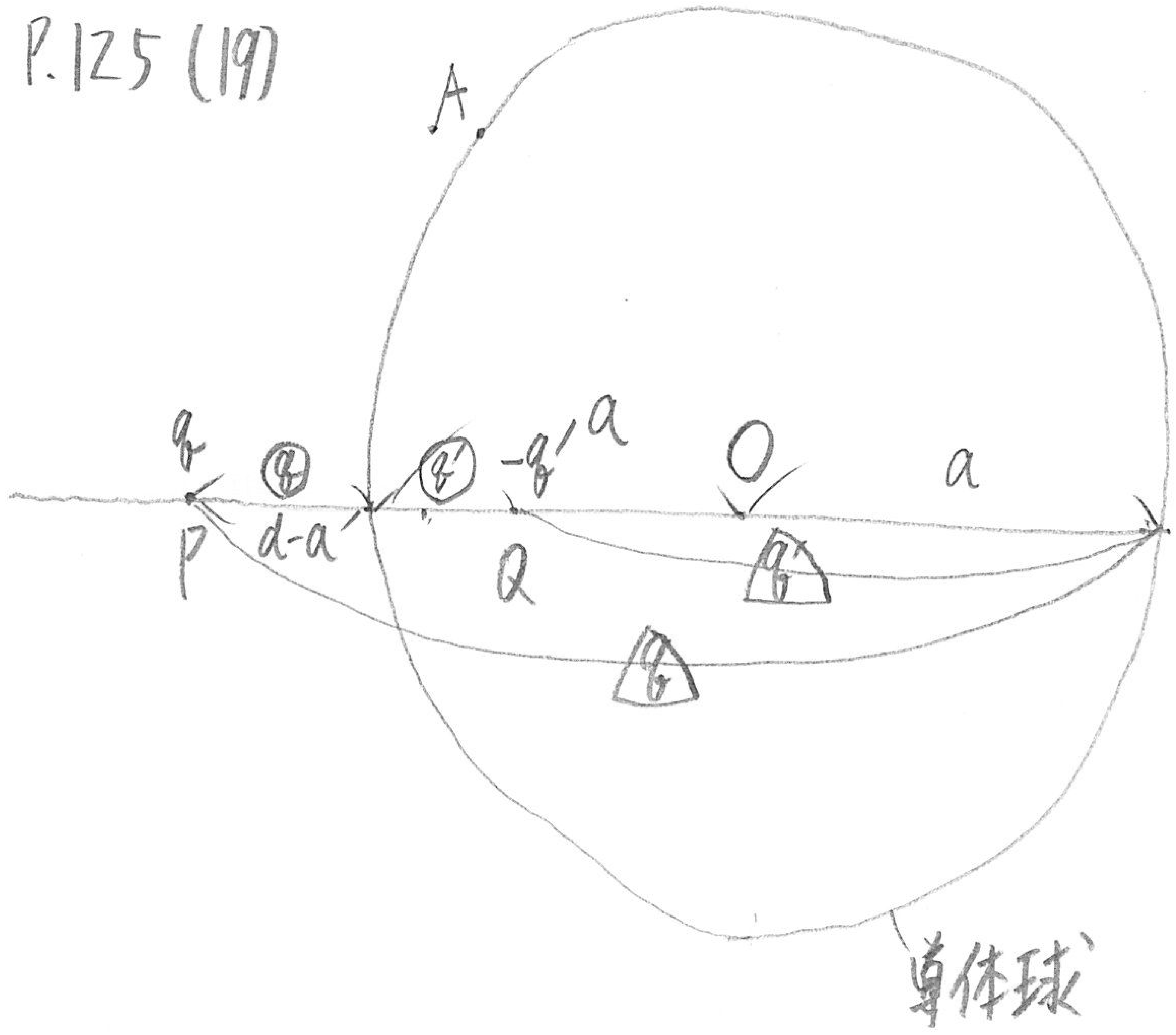
$$= \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r^4}\left(\left(\frac{r}{a^2} + \frac{3}{a} + \frac{3}{r}\right)x^2 - \frac{r^2}{a} - r\right)$$

よって、$\rho_e(\vec{r}) = -\varepsilon\left(\left(\dfrac{r}{a^2} + \dfrac{3}{a} + \dfrac{3}{r}\right)\cdot r^2 - 3\cdot\dfrac{r^2}{a} - 3r\right)\cdot\dfrac{e^{-\frac{r}{a}}}{r^4}$

$$= -\varepsilon\cdot\frac{e^{-\frac{r}{a}}}{a^2 r}$$

//

P.125 (19)



導体球を点電荷として考えることとして、その電荷を $-q'$ とする。

ここで、導体球である条件は、表面上の電位が全て0であることであるから、そのような場所Qに電荷 $-q'$ をおけば、導体球は点電荷とみなせることとなる。

まず、球上の1点Aを考えることとする。このAについて、電位が0になる条件は、 $\frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\left(\frac{q}{|AP|}-\frac{q'}{|AQ|}\right)=0$ 　よって、 $\frac{|AQ|}{|AP|}=\frac{q'}{q}$

この条件を満たす点Aの軌跡は、PQを $q:q'$ に内分する点と、PQを $q:q'$ に外分する点を直径とした円である。

すなわち、直線OPと球との2交点が、それぞれPQの内分点、外分点となるようにすればよい。

このとき、Aの軌跡で表される円上の点は、全て球上の点であるから、この円を直線PQを軸として0°から180°まで回転させた各平面上の点を考えることで、全ての球上の点において、電位が0となるように設定することができる。

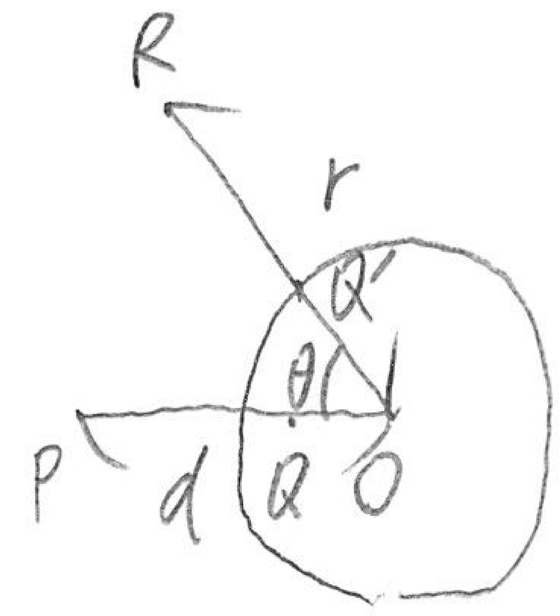
すなわち、Qは上図の位置にあり、

$$(a+d)\cdot\frac{q'}{q}+(d-a)\cdot\frac{q'}{q}=2a \Leftrightarrow \frac{q'}{q}=\frac{a}{d} \Leftrightarrow q'=\frac{a}{d}q$$

よって、qが受ける力は、 $|PQ| = (d-a)\cdot\frac{q+q'}{q} = \frac{d^2-a^2}{d}$ より、

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\left(\frac{q\cdot(-q')}{|PQ|^2}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{a}{d}q^2\cdot\frac{d^2}{(d^2-a^2)^2}$$

$$= -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon}\frac{ad}{(d^2-a^2)^2}$$



球外の静電ポテンシャルϕは、$\angle ROP = \theta$, $OR = r$としたとき、

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{q}{|PR|} - \frac{q'}{|QR|}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{|PR|} - \frac{a}{d|QR|}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}} - \frac{a}{d\sqrt{r^2+\left(\frac{a^2}{d}\right)^2-2r\frac{a^2}{d}\cos\theta}}\right)$$

電荷密度ωは、 $\omega = -\varepsilon\cdot\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)_{r=a}$

$$\therefore\ \omega = \frac{-q}{4\pi}\left(\frac{d\cos\theta - a}{(a^2+d^2-2ad\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{a}{d}\,\frac{\frac{a^2}{d}\cos\theta - a}{\left(a^2+\left(\frac{a^2}{d}\right)^2 - 2\frac{a^3}{d}\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$= -\frac{q}{4\pi}\left(\frac{d\cos\theta - a}{|PQ'|^3} - \frac{a}{d}\,\frac{\frac{a^2}{d}\cos\theta - a}{|QQ'|^3}\right)$$ (Q'は直線ORと球の交点)

球面上の全電荷は、$-q'$のことだから、

$$-q' = -\frac{a}{d}q$$