組 10　学生証番号 040209　氏名 石川 功　数学IA 演習レポート　理I 10-15

問(9,4)

$y=\mathrm{Arcsin}\,x$ より、$x=\sin y$ $\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$

逆関数の微分法より、$\cos y>0$ も考慮して

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$y=\mathrm{Arctan}\,x$ より、$x=\tan y$ $\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$

逆関数の微分法より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

問(9,5)

(1) $f(x)=(a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}$ の両辺に自然対数をとって

$$\log f(x)=\frac{1}{x}\log(a^x+b^x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{1}{x^2}\log(a^2+b^2)+\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x\log a+b^x\log b}{a^x+b^x}$$

$$f'(x)=(a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{\log(a^2+b^2)}{x^2}+\frac{a^x\log a+b^x\log b}{x(a^x+b^x)}\right)$$

(2) $f(x)=y=\mathrm{Arctan}\left(c\tan\frac{x}{2}\right)$

つまり $\tan y=c\tan\frac{x}{2}$

$$\frac{1}{\cos^2 y}\cdot\frac{dy}{dx}=c\cdot\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{c}{2\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{1+\tan^2 y}$$

$$=\frac{c}{2\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{1+c^2\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{c}{2\cos^2\frac{x}{2}\left(1+c^2\tan^2\frac{x}{2}\right)}$$

問(9,8) (1)

$g(x)$ は a で微分可能より、

$$g(x)=g(a)+(x-a)g'(a)+(x-a)B(x)$$

とおけて $B(x)$ は a で連続かつ $B(a)=0$ である。

① において $g(a)=0$ $g'(a)=0$ より、

$$g(x)=(x-a)B(x)$$

両辺に $f(x)$ をかけて、

$$h(x)=f(x)g(x)=(x-a)f(x)B(x)$$

$=(x-a)B'(x)$ とおく。

$f(x)$ は a のまわりで有界だから、

$$|f(x)|\leqq M \quad (x\in E^*(a;\delta_1))$$

が成り立つ。

よって

$$-M|B(x)|\leqq \overbrace{f(x)B(x)}^{B'(x)}\leqq M|B(x)|$$

$B(x)$ は a で連続かつ $B(a)=0$ より、

$B(x)\to 0$ $(x\to a)$ つまり $|B(x)|\to 0$ $(x\to a)$

それゆえ

$$\lim_{x\to a}M|B(x)|=0$$

$$\lim_{x\to a}(-M|B(x)|)=0$$

よって はさみ打ちの原理より、

$$\lim_{x\to a}B'(x)=\lim_{x\to a}(f(x)B(x))=0$$

つまり $B'(x)$ は $x=a$ で連続で

$$B'(a)=f(a)B(a)=f(a)\cdot 0=0$$

つまり、

$$\begin{cases} h(x)=h(a)+(x-a)h'(a)+(x-a)B'(x) \\ \text{かつ } B'(x) \text{ は } a \text{ で連続で } B'(a)=0 \end{cases}$$

をみたすため $h(x)$ は a で微分可能で

$h(a)=0$　$h'(a)=0$ である。

(2) (⇒)

g,h は a で微分可能より

$$g(x)=g(a)+(x-a)g'(a)+(x-a)B_1(x)$$

$g(a)=0$ より

$$g(x)=(x-a)g'(a)+(x-a)B(x)$$

$$h(x)=h(a)+(x-a)h'(a)+(x-a)B_2(x)$$

$h(a)=0$ より

$$h(x)=(x-a)h'(a)+(x-a)B_2(x)$$

$g(x)\neq 0$ において つまり $x\neq a$ において

$$f=\frac{h(x)}{g(x)}=\frac{\cancel{(x-a)}(h'(a)+B_2(x))}{\cancel{(x-a)}(g'(a)+B(x))}=\frac{h'(a)+B_2(x)}{g'(a)+B_1(x)}$$

$B_1(x)$, $B_2(x)$ は $x=a$ で連続かつ $B_1(a)=B_2(a)=0$ より、

$$\lim_{x\to a}B_2(x)=\lim_{x\to a}B_1(x)=0$$

よって $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{h'(a)+B_2(x)}{g'(a)+B_1(x)}=\frac{h'(a)}{g'(a)}$

収束する。

裏へ