

5) (9, 2) (1)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+2x} & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ x & (x < 0) \end{cases}$$

$x > 0$ のとき

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x+h}{1+2(x+h)} - \frac{x}{1+2x}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)(1+2x) - x(1+2x+2h)}{h(1+2x)(1+2x+2h)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{1+2x} \cdot \frac{1}{1+2x+2h}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1+2x)^2}$$

$x = 0$ のとき

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{x}{1+2x} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1+2x}$$

$$= 1$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x - 0}{x}$$

$$= 1$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$$

$x < 0$ のとき

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h - x}{h}$$

$$f'(x) = 1$$

(2) $x^4 - x^3 = x^3(x-1)$

$x^4 \geq x^3$ となるのは $x^3(x-1) \geq 0$ のときであり、 $x \geq 1$ $x \leq 0$

$x^4 < x^3$ となるのは $x^3(x-1) < 0$ のときであり、 $0 < x < 1$

つまり $f(x) = \begin{cases} x^3 & (x \geq 1, x \leq 0) \\ x^4 & (0 < x < 1) \end{cases}$

$x < 0$; $x > 1$ のとき

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2)$$

$$f'(x) = 3x^2$$

よって点 (a, a^3) ($a < 0, a > 1$)

における微分係数は $3a^2$

$x = 0$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^4 - 0}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x^3 - 0}{x} = 0$$

よって微分可能でその係数は 0

$x = 1$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +0} (x^2 + x + 1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -0} (x+1)(x^2+x+1) = 4$$

よって微分可能ではない。

$0 < x < 1$ のとき

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h}$$

$$= 4x^3$$

よって点 (a, a^4) ($0 < a < 1$)

における微分係数は $4a^3$

6) (9, 3)

$$g(x) = f(x)^{p(x)}$$

$$\log g(x) = p(x) / \log f(x)$$

$$g(x) = e^{p(x) / \log f(x)}$$

$$h(x) = p(x) / \log f(x) \text{ とおく。}$$

$$g(x) = e^{h(x)}$$

$$h(x) = p(x) / \log f(x)$$

で指数関数及び対数関数は

定義域のすべての点で微分可能

であるから、合成関数の微分法

より $g(x)$ は a で微分可能

よって

$$g'(x) = e^{p(x) / \log f(x)} \cdot (p'(x) / \log f(x) - p(x) / f(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)})$$

$$= e^{p(x) / \log f(x)} (p'(x) / \log f(x) - p(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)^2})$$

$x = a$ を代入して

$$g'(a) = g(a) (p'(a) / \log f(a) - \frac{p(a) f'(a)}{f(a)^2})$$