(2)

$(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$

両辺を b で微分すると，合成関数の微分法より

$(f^{-1})''(b) = \dfrac{d}{da}\left(\dfrac{1}{f'(a)}\right)\cdot\dfrac{da}{db}$

$= \dfrac{d}{da}\left(\dfrac{1}{f'(a)}\right)\cdot\dfrac{1}{\frac{df(a)}{da}}$

$f'(a)$ は a で微分可能であるため，

$(f^{-1})'(b)$ は b で微分可能である．

$(f^{-1})''(b) = \dfrac{-f''(a)}{\{f'(a)\}^2}\cdot\dfrac{1}{f'(a)}$

$(f^{-1})''(b) = -\dfrac{f''(a)}{\{f'(a)\}^3}$

問 (9, 11)

$\begin{cases} g(y) = g(b) + (y-b)g'(b) + (y-b)D(y) \\ \text{かつ} \\ D(y) \text{ は } y=b \text{ で連続かつ } D(b)=0 \end{cases}$

$y'(b)=0$ より，

$g(y) = g(b) + (y-b)D(y)$

$g(f(x)) = g(f(a)) + (f(x)-f(a))D(f(x))$

$(g\circ f)'(x) = (g\circ f)(a) + \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)D(f(x))$

$= (g\circ f)(a) + (x-a)\cdot\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}D(f(x))$

$B(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot D(f(x))$ とおくと，

$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ は I^* 上有界であるから，

$\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \leqq M$ （Mは実数）

$0 \leqq \left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot D(f(x))\right| \leqq M\cdot D(f(x))$

$D(f(x))$ は $f(x)=f(a)$ で連続かつ $D(f(a))=0$

であるから，$\lim_{x\to a} D(f(x)) = 0$

よってはさみ打ちの原理より，

$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot D(f(x)) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} B(x) = 0$

つまり，$B(x)$ は $x=a$ で連続かつ

$B(a) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}D(f(a))$

$= \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}D(b)$

$= \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot 0 = 0$

より，$(g\circ f)'(x) = (g\circ f)(a) + (x-a)B(x)$

とかける．

つまり，$(g\circ f)'(a) = 0$

(2) g は b で微分可能で，g∘f は a で微分可能だから

$\begin{cases} g(y) = g(b) + (y-b)g'(b) + (y-b)D(y) & \cdots ① \\ g(f(x)) = g(f(a)) + (x-a)A + (x-a)B(x) & \cdots ② \\ \text{かつ } D(y) \text{ は } b \text{ で連続で } D(b)=0 & \cdots ③ \\ B(x) \text{ は } a \text{ で連続で } B(a)=0 & \cdots ④ \end{cases}$ $A = (g(f(x))$

①より，

$g(f(x)) = g(f(a)) + (f(x)-b)g'(b) + (f(x)-b)D(f(x))$ $\cdots ①'$

② − ①' より

$(x-a)(A+B(x)) = (f(x)-b)\{g'(b)+D(f(x))\}$

$f(x) = f(a) + (x-a)\cdot\dfrac{A+B(x)}{g'(b)+D(f(x))}$

$= f(a) + (x-a)\cdot\dfrac{A}{g'(b)+D(f(x))} + (x-a)\cdot\dfrac{B(x)}{g'(b)+D(f(x))}$

$B_1(x) = \dfrac{B(x)}{g'(b)+D(f(x))}$ とおくと，

$\lim_{x\to a} B_1(x) = \dfrac{0}{g'(b)+0} = 0$

また，$B_1(a) = \dfrac{0}{g'(b)} = 0$

よって $f(x) = f(a) + (x-a)\cdot f'(x) + (x-a)B_1(x)$

とおけるから f も a で微分可能．

問 (9, 12)　$x\in\mathbb{R}$ において (i) より

$f(nx) = f((n-1)x)f(x)$

$= f((n-2)x)\cdot f(x)\cdot f(x) = \cdots = \{f(x)\}^n$

$x = \frac{a}{n}$ を代入すると，$f(a) = \{f(\frac{a}{n})\}^n$

$f(x)$ は 0 で微分可能かつ $f(0)=1$ より

$\begin{cases} f(x) = f(0) + x + xB(x) \\ x\to 0 \text{ のとき } B(x)\to 0 \text{ かつ } B(0)=0 \end{cases}$

$x=\frac{a}{n}$ を代入すると

$f(\frac{a}{n}) = f(0) + \frac{a}{n}(1+B(x))$

$= (1+\frac{a}{n}) + \frac{a}{n}B(x)$

?