(⇐) $g(x)$ は $x=a$ で微分可能より、

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)$$

$g(a)=0$ より、

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}=g'(a)\cdots①$$

よって

$$h'(a)=\lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\left\{f(x)\cdot\frac{g(x)}{x-a}\right\}\cdots(*)$$

$x\to a$ のとき $f(x)$ は収束するから、

$$\lim_{x\to a}f(x)=k\ \ (k\text{は実数})\ \cdots②$$

となる k が存在する。

①, ② より、$(*)$ は

$$h'(a)=\lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=k\cdot g'(a)$$

となり $h'(a)$ が存在するので $h(x)$ は $x=a$ で微分可能。

よって h は a で微分可能 ⇔ $x\to a$ のとき $f(x)$ は収束する。

問(9,9)

(1) n についての数学的帰納法によって示す。

(i) $n=1$ のとき

f, g が1回微分可能ならば、合成関数の微分法より、合成関数 $g\circ f$ は a で1回微分可能

(ii) $n=k$ のとき、

f, g が C^k 級であるとき $g\circ f$ が C^k 級であると仮定すると、

$n=k+1$ のとき、

つまり f, g が C^{k+1} 級のとき

$$(g\circ f)'=(g'\circ f)\cdot f'$$

f, g が C^{k+1} 級より、g', f が C^k 級である。

つまり仮定より、$g\circ f$ は C^k 級

また、f が C^{k+1} 級より、f' は C^k 級

よって $(g\circ f)'=(g'\circ f)\cdot f'$ は C^k 級であることがいえるため、$g\circ f$ は C^{k+1} 級である。

よって $n=k+1$ のときも成り立つ。

つまり、(i)(ii) より、n が自然数のとき、

題意は成り立つ。

(2) $(g\circ f)'(a)$

$=g'(f(a))f'(a)$ より、

$$(g\circ f)''(a)=\left(g'(f(a))f'(a)\right)'$$

↓積の微分法と合成関数の微分法

$$=g''(f(a))\cdot f'(a)\cdot f'(a)+g'(f(a))\cdot f''(a)$$

$$(g\circ f)''(a)=g''(f(a))\{f'(a)\}^2+g'(f(a))f''(a)$$

---

(3) $\begin{cases} g(x)=\dfrac{1}{y} \\ y=f(x)\end{cases}$ とすると、g は I 上 C^∞ 級であり、

f が I 上 C^n 級であることから、$g\circ y$ である

$g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ は (1) より、C^n 級である。

問(9,10)

(1) 数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$ のとき

f は1回微分可能より、逆関数の微分法から、

$(f^{-1})'=\dfrac{1}{f'}$ で f^{-1} は1回微分可能。

(ii) $n=k$ のとき

f が I 上 C^k 級 → f^{-1} は J 上 C^k 級であると仮定する。$n=k+1$ のとき、つまり f が C^{k+1} 級のとき、f' は C^k 級であり、

$(f^{-1})'=\dfrac{1}{f'}$ が成り立つ

問(9,9)(3) より、f' が C^k 級のとき $\dfrac{1}{f'}$ も C^k 級であるから $(f^{-1})'$ は C^k 級となり、

f^{-1} は C^{k+1} 級。よって $n=k+1$ のときも成り立つ。

(i)(ii) より、すべての自然数 n について成り立つ。